INTERPOLAÇÃO

DE ESPAÇOS DE ORLICZ VETORIAIS

E APLICAÇÕES

Este exemplar corresponde a redação final da tese devidamente corrigida e defendida pelo Sr. João Batista Garcia e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 22 de Fevereiro de 1991

Prof.Dr. Dicesar Lass Fernandez

Orientador

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de Doutor em Ciências.

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Dicesar Lass Fernandez pela ótima orientação e incentivo durante toda a elaboração deste trabalho.

À minha esposa Bete e minhas filhas Daniele e Simone pelo incentivo, paciência e compreensão com que acompanharam todo o desenrolar deste estudo.

À meus pais pelo grande esforço que dispenderam para a minha educação.

Aos meus colegas, que sempre me incentivaram, e em particular ao meu amigo Benjamin Bordin, que sempre esteve pronto a me ouvir quando precisei.

CONTEÚDO

INTRODUÇÃO i

CAPÍTULO I - ESPAÇOS DE ORLICZ 1
1. FUNÇÕES DE ORLICZ 1
2. ESPAÇOS DE ORLICZ A VALORES VETORIAIS 3

CAPÍTULO II - UM TEOREMA TIPO FEFFERMAN - STEIN 6
1. AS FUNÇÕES MAXIMAIS 6
2. O TEOREMA DA DECOMPOSIÇÃO DE LEBESGUE E A DECOMPOSIÇÃO DE CALDERÓN - ZYGMUND 7
3. UMA GENERALIZAÇÃO DO TEOREMA DE FEFFERMAN - STEIN 8

CAPÍTULO III - O MÉTODO DE INTERPOLAÇÃO $< , >_{\rho,p}$ 16
1. A DEFINIÇÃO DO MÉTODO $< , >_{\rho,p}$ 16
2. PROPRIEDADES DE $< , >_{\rho,p}$ 21

CAPÍTULO IV - INTERPOLAÇÃO DE ESPAÇOS $L^p_{(w)}(E)$ 31
1. RETICULADOS DE BANACH 31
2. INTERPOLAÇÃO DE ESPAÇOS $L^p_{(w)}(E)$ 35
3. CASO $\rho(t) = t^\theta$ 43
4. CASOS LIMITES 54

CAPÍTULO V - CARACTERIZAÇÃO DE ESPAÇOS DE ORLICZ COMO ESPAÇOS DE INTERPOLAÇÃO 59
1. CARACTERIZAÇÃO DE ESPAÇOS DE ORLICZ 59
2. CONSEQUÊNCIAS 72

CAPÍTULO VI - INTERPOLAÇÃO DE ESPAÇOS DE ORLICZ COM PESO 74
1. INTERPOLAÇÃO DOS ESPAÇOS $L^{\Phi}_{(w)}(E)$. CASO GERAL 74
2. CASO $\rho(t) = t^{\theta}$ 85
3. CASOS LIMITES 93

CAPÍTULO VII - OS ESPAÇOS $B^{s,w}_{\Phi,q}$ E $F^{s,w}_{\Phi,q}$ 101
1. NOTAÇÕES 101
2. UM TEOREMA DE MULTIPLICADORES PARA $L^{\Phi}_{w}(\ell^{s}_{q})$ 104
3. DEFINIÇÃO E PROPRIEDADES DE $B^{s,w}_{\Phi,q}$ E $F^{s,w}_{\Phi,q}$ 106
4. TEOREMA DE CARACTERIZAÇÃO E CONSEQUÊNCIAS 114

CAPÍTULO VIII - OS ESPAÇOS $B^{\sigma,w}_{\Phi,q}$ E $F^{\sigma,w}_{\Phi,q}$ 124
1. DEFINIÇÕES E PROPRIEDADES 124
2. TEOREMAS DE INTERPOLAÇÃO E CONSEQUÊNCIAS.
CASO GERAL 127
3. CASO $\rho(t) = t^{\theta}$ 131

REFERÊNCIAS 132

INTRODUÇÃO

A teoria dos espaços de interpolação tem sua origem em dois teoremas clássicos: o teorema de interpolação de M. Riesz (1927) e o teorema de interpolação de Marcinkiewicz (1939). No caso mais simples ("caso diagonal") o teorema de Riesz diz que se T é um operador linear que aplica (aqui, aplica significa, aplica continuamente) L^{p_0} em L^{p_0} e L^{p_1} em L^{p_1}, onde p_0 e p_1 são números dados, $1 \leq p_0 \leq p_1 \leq \infty$, então T aplica L^p em L^p, para cada $p \in (p_0, p_1)$, e o teorema de Marcinkiewicz é um resultado semelhante com os "espaços extremos" trocados por apropriados espaços "fracos" ($f \in L^p$-fraco $\Leftrightarrow \sup_{\lambda>0} \lambda^p \cdot |\{|f| > \lambda\}| < \infty$). Estes teoremas criaram uma variedade de aplicações em Análise, embora a importância do teorema de Marcinkiewicz, por um longo tempo em esquecimento, não tenha sido compreendida até os anos 50, quando foi redemonstrado por A.Zygmund e independentemente por M.Cotlar.

A era moderna foi iniciada por volta de 1960 e centraliza os nomes de N.Aronszajn, J.L.Lions, E.Gagliardo, A.P.Calderón, S.G.Krein, J.Peetre, etc. Curiosamente, parte do impulso para estes estudos vieram de problemas relacionados com Equações Diferenciais Parciais, envolvendo a escala de espaços de Sobolev $H^s(\Omega)$.

A colocação é essencialmente a seguinte: Consideremos dois espaços de Banach E_0 e E_1, ambos continuamente imersos em um mesmo espaço vetorial topológico de Hausdorff $\mathcal{A}$ (o par (E_0, E_1) é chamado um par de Banach). Temos interesse em espaços de Banach E, intermediários, ou seja, tais que $E_0 \cap E_1 \hookrightarrow E \hookrightarrow E_0 + E_1$ ("$\hookrightarrow$" significa inclusão contínua), com a propriedade que se T é um operador linear definido em $\mathcal{A}$ tal que T aplica E_0 em E_0 e E_1 em E_1 então T aplica E em E. Nesse caso dizemos que E é um espaço de interpolação com respeito ao par (E_0, E_1). Existe uma generalização imediata com dois pares (E_0, E_1) e (F_0, F_1), fornecendo a noção de dois espaços de Banach E e F serem espaços de interpolação relativos aos pares (E_0, E_1) e (F_0, F_1). O tratamento deste problema é funtorial: É de interesse construções gerais (funtores ou métodos de interpolação) que a cada par de Banach (E_0, E_1) associa um espaço de interpolação $E = \mathcal{F}(E_0, E_1)$.

Os métodos de interpolação mais importantes, pelo menos do ponto de vista das aplicações, são os métodos real e complexo: O método complexo, usualmente associado ao nome de A.P.Calderón, é uma descendência da demonstração de G.O.Thorin (1939) ao teorema de Riesz (o teorema de Riesz- Thorin), enquanto que o método real (originado em idéias de J.L.Lions e E.Gagliardo, segundo J.Peetre) é em algum sentido, ligado com o teorema de Marcinkiewicz e foi cristalizado num trabalho agora clássico, de J.L.Lions e J.Peetre. A precisa ligação entre o teorema de Marcinkiewicz e a teoria de Lions-Peetre, foi feita por M.Cotlar num manuscrito de circulação restrita. Um passo decisivo para a compreensão do método real, foi a introdução do K- e J-funcional por J.Peetre, embora idéias relacionadas já apareçam de forma implícita nos trabalhos de E.Gagliardo.

Recordemos que

$$K(t,a) = \inf_{a=a_0+a_1} (\,||a_0||_{E_0} + t||a_1||_{E_1}\,), \qquad 0 < t < \infty, \quad a \in E_0 + E_1;$$

e

$$J(t,a) = \max(\,||a||_{E_0}, t||a||_{E_1}\,), \qquad 0 < t < \infty, \quad a \in E_0 \cap E_1.$$

Na interpretação de J.Peetre, o $K(t,a)$ funcional aparece, à grosso modo, como a envoltória convexa do "conjunto de Gagliardo" associado à $a \in E_0 + E_1$ (ver [1]). O funcional $J(t,a)$ é claramente um funcional dual.

É também compreensível que os espaços de interpolação têm importantes aplicações, além de em E.D.P., por exemplo, na Análise Harmônica e na Teoria de Aproximação. De fato, a conexão com a Teoria de Aproximação reside na observação que o módulo de continuidade pode ser interpretado como um apropriado K-funcional. Por outro lado, o J-funcional pode ser pensado como um funcional de melhor aproximação. Estas idéias estão registradas no clássico curso de Brasília, proferido por J.Peetre e desenvolvidas extensivamente por P.L.Butzer e sua escola em Aachen.

Os espaços de interpolação gerados pelos K- e J-funcionais aplicam-se fortemente em ambientes gerados pelos espaços L^p,isto é, aos próprios espaços L^p, aos Sobolev-L^p, etc.

A interpolação dos espaços de Orlicz também tem sua história (e pré- história). A (pré-) história começa, como não poderia deixar de ser, com um teorema de W.Orlicz e culmina com teoremas de A.Torchinski. Estes teoremas têm o aspecto clássico paralelo aos teoremas de Riesz-Thorin e de Marcinkiewicz. As teorias abstratas aparecem ligadas ao nome de J.Peetre, primeiro utilizando o K-funcional e depois num trabalho originado em idéias (implícitas) de E.Gagliardo. O trabalho utilizando o K-funcional, apesar de resolver essencialmente o problema, dá origem a um método pouco prático e difícil de repetir o sucesso do K-método no ambiente L^p. Por outro lado, o trabalho baseado nas idéias de E.Gagliardo tratava-se de um registro de reflexões profundas, mas preliminares. Este trabalho (1971) cristalizou-se num trabalho definitivo, escrito em 1977, em colaboração com J.Gustavsson. A diferença essencial com o K-método (ou melhor o J-método), é que utiliza sequências "incondicionalmente somáveis" no lugar das sequências ℓ_p-somáveis utilizadas no K- (e J-) método. O método de Gustavsson-Peetre mostra-se bastante adaptável na interpolação de espaços de Orlicz e de espaços de funções modelados em espaços de Orlicz, como por exemplo, os espaços de Sobolev- Orlicz.

O problema que se coloca então, é o de se conhecer melhor o método de Gustavsson-Peetre, com o intúito de obter resultados interessantes nos ambientes modelados em espaços de Orlicz, como é o caso do K- e J- métodos no ambiente L^p. Por exemplo, é de interesse para a geometria dos espaços de Banach, saber se um método de interpolação comuta com L^p, isto é, se $\mathcal{F}(L^p(E_0), L^p(E_1)) = L^p(\mathcal{F}(E_0, E_1))$. Esta comutação é válida no caso do K- e J-métodos e uma questão já levantada por J.Peetre, é se esta comutação também continua válida no caso do método de Gustavsson-Peetre (uma consequência imediata desta comutação seria que os espaços de Orlicz reflexivos têm a propriedade U.M.D. (Unconditional Martingale Differences) desenvolvida por D.L.Burkholder (ver [3])). Na tentativa de obter esta comutação deparamo-nos com vários obstáculos, que nos levaram a fazer modificações no método original de Gustavsson-Peetre, e criar uma variante desse método.

O objetivo desse trabalho é expor de forma sistemática a teoria dessa variante, bem como aplicá-la aos espaços de funções modelados em espaços de Orlicz, como por exemplo, os espaços de Besov-Sobolev-Triebel-Orlicz.

No que segue faremos comentários sobre o desenvolvimento do trabalho em cada capítulo separadamente.

No Capítulo I, fazemos uma breve exposição dos espaços de Orlicz, de funções vetoriais, com peso. Apresentamos os índices de Boyd associados às funções de Orlicz, e um teorema de interpolação do tipo Marcinkiewicz para espaços de Orlicz, que será utilizado no Capítulo II. Os resultados deste capítulo serão apresentados sem demonstração, visto que podem ser encontradas nas referências.

No Capítulo II, é demonstrado um resultado que generaliza um teorema de interpolação, citado na bibliografia como de Fefferman-Stein. A demonstração segue basicamente as mesmas técnicas do teorema de Fefferman-Stein, sendo que o ponto crucial é a obtenção de um teorema para os espaços de Orlicz, que generaliza uma desigualdade de Fefferman-Stein (ver [8], [28]). Acreditamos que para os espaços de Orlicz estes resultados são novos, ou pelo menos não encontramos referências.

No Capítulo III, começamos a nos preparar para obtermos resultados de interpolação abstrata para os espaços de Orlicz e espaços de funções modelados em espaços de Orlicz. Introduzimos um método de interpolação, denotado por $< \ , \ >_{\rho,p}$, onde $1 \leq p \leq \infty$ e ρ é um parâmetro funcional, que é uma variante do método de Gustavsson-Peetre ([12]). Demonstramos algumas propriedades que confirmam que a nossa definição consiste de fato em um método de interpolação. Não encontramos na literatura, uma demonstração de que os espaços gerados pelo método de Gustavsson-Peetre são completos. Portanto desenvolvemos uma técnica para demonstrarmos que os espaços gerados pelo nosso método são completos. A demonstração de que $< \ , \ >_{\rho,p}$ é realmente um método de interpolação é modelada na de Gustavsson-Peetre, mas envolve agora uma propriedade delicada de simetria das funções de Rademacher.

Começamos a desenvolver no Capítulo IV os resultados de interpolação envolvendo o método $< \ , \ >_{\rho,p}$. Inicialmente demonstramos que o nosso método comuta com L^p, isto é, $L^p(< E_0, E_1 >_{\rho,p}) =< L^p(E_0), L^p(E_1) >_{\rho,p}$. A seguir apresentamos outros teoremas de interpolação destacando o caso $\rho(t) = t^\theta$ e os casos limites. Duas ferramentas que são frequentemente utilizadas neste capítulo e nos seguintes, são a desigualdade de Khintchine-Maurey e uma versão vetorial de uma desigualdade do Carlson ([12]). A primeira destas desigualdades é uma versão vetorial da desigualdade de Khintchine e encontra-se demonstrada em [19], já a segunda acreditamos ser uma versão nova da desigualdade de Carlson na formulação de J.Peetre (ver [12]).

É no Capítulo V que se apresenta um dos resultados centrais de nosso trabalho. Aqui obtivemos um resultado, que caracteriza os espaços de Orlicz reflexivos como interpolação de espaços L^p. Esse resultado permite que algumas propriedades que são estáveis por interpolação sejam repassadas de L^p aos espaços de Orlicz, como por exemplo, a propriedade U.M.D. Apresentamos também um caso limite para o teorema de caracterização acima referido.

No Capítulo VI continuamos a desenvolver os teoremas de interpolação para os espaços de Orlicz com peso, apresentando inicialmente um resultado, que estabelece uma comutação dos espaços de Orlicz com o método $< \, , \, >_{\rho,p}$. Destacamos também o caso $\rho(t) = t^\theta$ e casos limites.

A partir de idéias de L.Hörmander, os espaços de Lipschitz e de Sobolev foram generalizados por diversos autores, principalmente J.Peetre ([23]) e H.Triebel (ver [29]). Atualmente essas generalizações são denominadas de espaços de Besov-Sobolev-Triebel e são denotados por $B^s_{p,q}$ e $F^s_{p,q}$. O primeiro destes espaços generaliza os espaços de Lipschitz ($B^s_{\infty,\infty} = Lip_s$) e o segundo os espaços de Sobolev ($F^s_{p,2} = H^s_p$). As versões com peso desses espaços foram tratadas principalmente por Bui Hui Qui ([24]). O objetivo do Capítulo VII é obtermos uma nova generalização dos espaços de Besov-Sobolev-Triebel, que chamaremos de Besov-Sobolev-Triebel-Orlicz com peso, e denotaremos por $B^{s,w}_{\Phi,q}$ e $F^{s,w}_{\Phi,q}$, onde Φ é uma função de Orlicz, w um peso , $1 \leq q \leq \infty$ e s é um parâmetro real. Quando $\Phi(t) = t^p$, $1 < p < \infty$, os espaços $B^{s,w}_{\Phi,q}$ e $F^{s,w}_{\Phi,q}$ são os espaços de Besov-Sobolev-Triebel com peso, estudados por B.H.Qui ([24]). Como acontece com os espaços de Orlicz, os espaços $B^{s,w}_{\Phi,q}$ e $F^{s,w}_{\Phi,q}$ também podem ser caracterizados como espaços de interpolação dos espaços $B^{s,w}_{\Phi,q}$ e $F^{s,w}_{\Phi,q}$ respectivamente. Como consequência concluímos que os espaços de Besov-Sobolev-Triebel-Orlicz com peso têm a propriedade U.M.D.

Finalmente, no Capítulo VIII extendemos a definição dos espaços $B^{s,w}_{\Phi,q}$ e $F^{s,w}_{\Phi,q}$, onde trocamos o parâmetro real s por um parâmetro funcional σ, pertencente a uma classe conveniente. Caracterizamos os espaços $B^{\sigma,w}_{\Phi,q}$ e $F^{\sigma,w}_{\Phi,q}$ via interpolação dos espaços $B^{s,w}_{\Phi,q}$ e $F^{s,w}_{\Phi,q}$ respectivamente. Como consequência teremos que $B^{\sigma,w}_{\Phi,q}$ e $F^{\sigma,w}_{\Phi,q}$ têm a propriedade U.M.D. Para concluirmos, demonstramos outros teoremas de interpolação onde destacamos o caso $\rho(t) = t^\theta$.

No trabalho, indicações do tipo Teorema III.2.1, referem-se ao teorema 2.1 do Capítulo III. Se a indicação for para um resultado do próprio capítulo não usaremos o algarismo romano.

CAPÍTULO I

ESPAÇOS DE ORLICZ

Neste capítulo faremos uma rápida exposição dos espaços de Orlicz de funções vetoriais e com peso. Iniciaremos apresentando as funções que geram os espaços de Orlicz e os índices de Boyd associados a tais funções. Estes índices terão papel importante no desenvolvimento de todo nosso trabalho. A seguir recordaremos a definição dos espaços de Orlicz a valores vetoriais e introduziremos os espaços de Orlicz a valores vetoriais com peso. Um teorema de interpolação do tipo Marcinkiewicz para espaços de Orlicz será enunciado para futuro uso no capítulo II.

Os espaços de Orlicz a valores vetoriais são mencionados, por exemplo, em [10], [27], [30], [31]. Os resultados envolvendo as funções de Orlicz (condição-Δ_2, índices, etc) podem ser encontrados em [9], [16], [18], [20], etc.

1. FUNÇÕES DE ORLICZ

1.1. Por uma **função de Orlicz** entenderemos uma função $\Phi : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$ que é contínua, convexa e $\Phi(0) = 0$.

Cada função de Orlicz é não decrescente e tem uma representação da forma

(1) $$\Phi(t) = \int_0^t \varphi(s)ds$$

onde φ é não-decrescente e contínua à direita (derivada à direita de Φ, chamada também **densidade** de Φ).

1.2. A **função conjugada** Φ^* de uma função de Orlicz Φ, é definida em $[0,\infty)$ por

(1) $$\Phi^*(s) = \max_{t>0}(st - \Phi(t)) \ .$$

Relacionando as funções Φ e Φ^* temos a **desigualdade de Young**, isto é,

(2) $$st \leq \Phi(t) + \Phi^*(s) \ .$$

1.3. Em diversas situações trabalharemos com funções de Orlicz que satisfazem a **condição-Δ_2**, ou seja, com as funções Φ para as quais existe uma constante $C > 1$

tal que para todo $t \geq 0$ temos

$$\Phi(2t) \leq C\Phi(t) \ , \tag{1}$$

ou equivalentemente, para cada $r > 1$, existe uma constante positiva $C = C(r)$, tal que para todo $t \geq 0$,

$$\Phi(rt) \leq C\Phi(t) \ . \tag{2}$$

Outra caracterização da condição-Δ_2 é dada através da função densidade, mais precisamente, uma função de Orlicz Φ satisfaz a condição-Δ_2, se e somente se existe uma constante $\alpha > 1$ tal que

$$t\varphi(t) < \alpha\Phi(t) \qquad (t > 0) \ , \tag{3}$$

onde φ é a densidade de Φ.

Ainda envolvendo a função densidade, temos que uma função de Orlicz Φ satisfaz a condição-Δ_2, se e somente se para cada $r > 1$ existe uma constante positiva $C = C(r)$ tal que

$$\varphi(rt) \leq C\varphi(t) \ . \tag{4}$$

Com relação à conjugada de Φ, temos que Φ^* satisfaz a condição-Δ_2, se e somente se existe $\alpha > 1$ tal que

$$\alpha\Phi(t) < t\varphi(t) \qquad (t > 0) \ . \tag{5}$$

1.4. Seja Φ uma função de Orlicz e consideremos a função $h_\Phi \ : \ (0, \infty) \longrightarrow I\!R$ definida por

$$h_\Phi(s) = \sup_{t>0} \frac{\Phi^{-1}(t)}{\Phi^{-1}(st)} \ .$$

Vamos considerar também a função

$$M_\Phi(s) = \frac{-\log h_\Phi(s)}{\log s}.$$

Os **índices inferior** e **superior de Boyd** associados a Φ são definidos respectivamente por

$$\beta_\Phi = \sup_{s>1} M_\Phi(s) = \lim_{s\to\infty} M_\Phi(s)$$

e

$$\alpha_\Phi = \inf_{0<s<1} M_\Phi(s) = \lim_{s\to 0^+} M_\Phi(s) \ .$$

Temos que $0 \leq \beta_\Phi \leq \alpha_\Phi \leq 1$.

O expoente inferior e **superior de Boyd** associados a Φ, são dados respectivamente por

$$q_\Phi = \frac{1}{\alpha_\Phi} \quad \text{e} \quad p_\Phi = \frac{1}{\beta_\Phi}.$$

Aqui entendemos que $p_\Phi = \infty$ se $\beta_\Phi = 0$ e vice-versa. Assim $1 \leq q_\Phi \leq p_\Phi \leq \infty$. Agora se Φ satisfaz a condição-Δ_2 então $p_\Phi < \infty$. Analogamente se Φ^* satisfaz a condição-Δ_2 então $q_\Phi > 1$.

Seja Φ uma função de Orlicz que satisfaz a condição- Δ_2. Então se $0 < r < q_\Phi$ e $0 < s < 1$ ou $p_\Phi < r < \infty$ e $s > 1$ temos que existe uma constante positiva $C > 1$ tal que para todo $t > 0$ vale

$$\Phi(st) < Cs^r\Phi(t) \ . \tag{1}$$

2. ESPAÇOS DE ORLICZ A VALORES VETORIAIS

2.1. Em quase tudo o que segue fixaremos um espaço de medida (não-negativa) σ-finita (Ω, Σ, μ). Seja E um espaço de Banach. Uma função $f : \Omega \longrightarrow E$ é chamada **simples** se

$$f = \sum_{i=1}^{N} x_i \chi_{B_i}$$

onde $x_i \in E$, χ_{B_i} é a função característica do conjunto μ- mensurável B_i e $\mu(B_i) < \infty$.

Uma função $f : \Omega \longrightarrow E$ é **fortemente μ-mensurável** se existe uma sequência de funções simples $(f_n)_{n\geq 0}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} ||f_n - f||_E = 0 \qquad \mu - \text{a.e.}$$

2.2. Seja Φ uma função de Orlicz e E um espaço de Banach. O **espaço de Orlicz** $L^\Phi(\Omega, \Sigma, \mu; E) = L^\Phi(E)$ é o espaço vetorial de todas as (classes de equivalência módulo igualdade μ-a.e.) funções $f : \Omega \longrightarrow E$ fortemente μ- mensurável tais que

$$\int_\Omega \Phi\left(\frac{||f(x)||_E}{\lambda}\right) d\mu \leq 1 \tag{1}$$

para algum $\lambda > 0$. O espaço $L^\Phi(E)$ torna-se um espaço de Banach quando munido de uma das duas normas equivalentes, definidas por

$$||f||_{L^\Phi(E)} = \inf\left\{\lambda > 0 \ : \ \int_\Omega \Phi\left(\frac{||f(x)||_E}{\lambda}\right) d\mu \leq 1\right\} \tag{2}$$

e

(3) $$\|f\|_{(L^{\Phi}(E))} = \sup\left\{\int_\Omega \|f(x)\|_E\|g(x)\|_{E'}d\mu \ : \ g \in L^{\Phi^*}(E') \, , \, \|g\|_{L^{\Phi^*}(E')} \leq 1\right\}.$$

onde E' denota o dual topológico de E.

Se $\Phi(t) = t^p$, $1 < p < \infty$, então $L^{\Phi}(E) = L^p(E)$ e para cada $f \in L^{\Phi}(E)$ tem-se

(4) $$\|f\|_{(L^{\Phi}(E))} = p'^{1/p'}\left(\int_\Omega \|f(x)\|_E^p d\mu\right)^{1/p}$$

onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Quando $E = \mathbb{R}$ escreveremos L^{Φ} para $L^{\Phi}(\mathbb{R})$.

Valem as seguintes propriedades

(5) $$\|f\|_{L^{\Phi}(E)} \leq 1 \Longleftrightarrow \int_\Omega \Phi(\|f(x)\|_E)d\mu \leq 1$$

e

(6) $$\|fg\|_{L^1(E)} \leq 2\|f\|_{L^{\Phi}(E)}\|g\|_{L^{\Phi^*}(E')} \qquad \text{(Hölder)}$$

para $f \in L^{\Phi}(E)$ e $g \in L^{\Phi^*}(E')$.

Dadas $(f_n)_{n\geq 0}$ e f em $L^{\Phi}(E)$, diremos que $(f_n)_{n\geq 0}$ **converge em média** para f se

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega \Phi(\|f_n(x) - f(x)\|_E)d\mu = 0.$$

Pode-se provar que convergência em norma é equivalente a convergência em média se Φ satisfaz a condição- Δ_2. Como consequência segue que o conjunto das funções simples é denso em E se Φ satisfaz a condição-Δ_2.

Consideremos agora $w \ : \ \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ um **peso**, isto é, uma função μ-mensurável e positiva. O **espaço de Orlicz com peso** $L^{\Phi}_{(w)}(E)$ é definido como o espaço das funções $f \ : \ \Omega \longrightarrow E$ tais que $fw \in L^{\Phi}(E)$. O espaço $L^{\Phi}_{(w)}(E)$ munido da norma

$$\|f\|_{L^{\Phi}_{(w)}(E)} = \|fw\|_{L^{\Phi}(E)}$$

torna-se um espaço de Banach. Além disso o conjunto formado das funções $f \ : \ \Omega \longrightarrow E$ tais que fw é simples é denso em $L^{\Phi}_{(w)}(E)$.

2.3. Denotaremos por $\mathcal{M}(\Omega, \Sigma, \mu; E)$ o espaço das funções $f \ : \ \Omega \longrightarrow E$ fortemente μ-mensuráveis. Sejam E e F dois espaços de Banach e (Ω, Σ, μ) e (Ω', Σ', ν) dois espaços de medida σ-finita. Diremos que um operador

$$T \,:\, \mathcal{M}(\Omega, \Sigma, \mu; E) \longrightarrow \mathcal{M}(\Omega', \Sigma', \nu; F)$$

é **quase-aditivo** se existe uma constante positiva C tal que

$$(1) \qquad \|T(f+g)(x)\|_F \le C(\|Tf(x)\|_F + \|Tg(x)\|_F).$$

Diremos também que um operador

$$T \,:\, L^p(\Omega, \Sigma, \mu; E) \longrightarrow \mathcal{M}(\Omega', \Sigma', \nu; F)$$

é do **tipo-fraco** $(L^p(E), L^p(F))$, $1 \le p < \infty$, se existe uma constante positiva C tal que para toda $f \in L^p(\Omega, \Sigma, \mu; E)$ e todo $\lambda \in \mathbb{R}_+$ temos

$$(2) \qquad \nu(\{y \in \Omega' \,:\, \|Tf(y)\|_F > \lambda\}) \le C\lambda^{-p} \int_\Omega \|f(x)\|_E^p d\mu.$$

No caso $p = \infty$ se entende por tipo-fraco $(L^\infty(E), L^\infty(F))$ a limitação em norma

$$(3) \qquad \|Tf\|_{L^\infty(\Omega', \Sigma', \nu; F)} \le C\|f\|_{L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu; E)}.$$

O próximo teorema foi demonstrado em [9] para funções à valores escalares, mas o resultado vale sem alterar a linha da demonstração, para funções à valores em um espaço de Banach E.

2.4. TEOREMA: Consideremos r e s tais que $1 \le r < q_\Phi \le p_\Phi < s \le \infty$ e $T : L^r(E) + L^s(E) \longrightarrow \mathcal{M}(\Omega', \Sigma', \nu; F)$ um operador quase-aditivo do tipo-fraco $(L^r(E), L^r(F))$ e do tipo-fraco $(L^s(E), L^s(F))$. Se Φ é uma função de Orlicz que juntamente com sua conjugada satisfaçam a condição-Δ_2, então T está definido em $L^\Phi(E)$ e se $f \in L^\Phi(E)$ temos

$$\int_{\Omega'} \Phi(\|Tf(y)\|_F) d\nu \le \int_\Omega \Phi(\|f(x)\|_E) d\mu.$$

Além disso se T é **positivamente homogêneo**, i.é., $\|T(\lambda f)(y)\|_F = |\lambda|\ \|T(y)\|_F$, então

$$\|Tf\|_{L^\Phi(F)} \le C\|f\|_{L^\Phi(E)}.$$

CAPÍTULO II

UM TEOREMA TIPO FEFFERMAN - STEIN

Neste capítulo apresentaremos uma versão vetorial, para os espaços de Orlicz, de um teorema de interpolação referido na literatura como de Fefferman - Stein. Para tanto apresentaremos inicialmente as funções maximais de Hardy-Littlewood e sharp que estão estreitamente ligadas ao problema. Outro resultado básico é a decomposição de Calderón-Zygmund, que será fortemente usado para demonstrarmos uma generalização de uma desigualdade de Fefferman-Stein. Essa desigualdade, por sua vez, auxiliará na demonstração do resultado central deste capítulo.

O espaço de medida considerado neste capítulo será $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}, \mu)$, onde $\mathcal{B}$ é a σ-álgebra de Borel e μ é uma medida positiva, finita em compactos e tendo a propriedade **doubling**, ou seja, $\mu(Q^2) \leq C\mu(Q)$ onde Q é um cubo qualquer do $\mathbb{R}^n$ e Q^2 significa a dilatação de Q, dobrando os lados e preservando o centro de Q. A condição doubling implica que para cada $\alpha > 0$, existe uma constante $C = C(\alpha) > 0$, dependendo somente de α, tal que $\mu(Q^\alpha) \leq C\mu(Q)$, onde Q^α tem significado análogo ao de Q^2.

Os resultados deste capítulo para os espaços L^p podem ser encontrados em [8] e [28].

Espaços de Banach arbitrários serão denotados pelas letras E, F, etc.

1. AS FUNÇÕES MAXIMAIS

1.1. Seja E um espaço de Banach e $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n, E) = L^1_{loc}(E)$ o espaço das funções definidas no $\mathbb{R}^n$ a valores em E que são localmente integráveis. Para $f \in L^1_{loc}(E)$ a **função maximal de Hardy- Littlewood** de f é definida por

$$(1) \qquad Mf(x) = \sup \frac{1}{\mu(Q)} \int_Q \|f(y)\|_E d\mu \qquad (x \in \mathbb{R}^n)$$

onde o supremo é tomado sobre todos os cubos de lados paralelos aos eixos (simplesmente cubos a partir de agora), e que contém x.

1.2. A função maximal de Hardy-Littlewood verifica a seguinte desigualdade para $1 < p \leq \infty$

$$(1) \qquad \|Mf\|_{L^p} \leq C\|f\|_{L^p(E)} \qquad (f \in L^p(E))$$

onde a constante C depende somente de p e n.

Observemos em 1.2(1), que a maximal Mf é escalar.

1.3. Para $f \in L^1_{loc}(E)$ a **função maximal sharp** de f é definida por

$$M^\sharp f(x) = \sup \frac{1}{\mu(Q)} \int_Q \|f(y) - f_Q\|_E d\mu \qquad (x \in \mathbb{R}^n) \tag{1}$$

onde o supremo é como em 1.2. e f_Q é o valor médio de f sobre o cubo Q, isto é,

$$f_Q = \int_Q f(y) d\mu. \tag{2}$$

1.4. Valem as seguintes desigualdades para $f \in L^1_{loc}(E)$ e $x \in \mathbb{R}^n$

$$M(\|f(\cdot)\|_E)(x) = Mf(x), \tag{1}$$

$$M^\sharp f(x) \leq 2Mf(x) \tag{2}$$

e

$$M^\sharp(\|f(\cdot)\|_E)(x) \leq 2M^\sharp f(x). \tag{3}$$

2. O TEOREMA DA DIFERENCIAÇÃO DE LEBESGUE E A DECOMPOSIÇÃO DE CALDERÓN-ZYGMUND

2.1. O Teorema da Diferenciação de Lebesgue (caso escalar) nos assegura que para funções localmente integráveis, vale a seguinte igualdade para quase todo $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{\mu(Q_r)} \int_{Q_r} f(y) d\mu = f(x) \tag{1}$$

onde Q_r denotam cubos centrados em x e de raio r.

2.2. Aplicando 2.1(1) à função $x \rightsquigarrow \|f(x)\|_E$ para $f \in L^1_{loc}(E)$, teremos imediatamente que

$$\|f(x)\|_E \leq Mf(x) \qquad \mu - \text{a.e.} \tag{1}$$

2.3. Para cada $k \in \mathbb{Z}$, consideremos o conjunto $\Lambda_k = 2^{-k}\mathbb{Z}^n$, formado pelos pontos do $\mathbb{R}^n$ cujas coordenadas são múltiplos inteiros de 2^{-k}. Seja D_k a coleção dos cubos cujos vértices estão em Λ_k e os lados têm comprimento 2^{-k}. Os elementos de $D = \cup_{k=-\infty}^{\infty} D_k$ são chamados **cubos diádicos**.

Para o próximo resultado a ferramenta básica utilizada será a seguinte decomposição de Calderón-Zygmund com respeito à medida μ (ver [8]).

2.4. TEOREMA: Sejam $f \in L^1(E)$ e $t > 0$. Existe uma família $C_t = C_t(f, \mu)$, de cubos com interiores disjuntos, consistindo de cubos diádicos maximais tais que

(1) $$\frac{1}{\mu(Q)} \int_Q ||f(x)||_E d\mu > t$$

que satisfazem

(2) $$t < \frac{1}{\mu(Q)} \int_Q ||f(x)||_E d\mu < Ct$$

para cada $Q \in C_t$;

(3) $$||f(x)||_E \leq t$$

para μ-a.e. $x \in \cup\{Q : Q \in C_t\}$. Além disso, para cada $t > 0$, o conjunto $E_t = \{x \in I\!R^n : Mf(x) > t\} \subset \cup\{Q^3 : Q \in C_{t/C}\}$, e temos a estimativa

(4) $$\mu(E_t) \leq C\, t^{-1} \int_{I\!R^n} ||f(x)||_E d\mu.$$

3. UMA GENERALIZAÇÃO DO TEOREMA DE FEFFERMAN-STEIN

O próximo resultado é uma generalização de uma desigualdade de Fefferman-Stein.

3.1. TEOREMA: Seja Φ uma função de Orlicz que satisfaz a condição-Δ_2 e f uma função tal que $Mf \in L^{p_0}$ para algum p_0 com $0 < p_0 < q_\Phi$. Então

(1) $$\int_{I\!R^n} \Phi(Mf(x))d\mu \leq C \int_{I\!R^n} \Phi(M^\sharp f(x))d\mu,$$

com C independente de f.

Demonstração. Levando em conta 1.4(1), 1.4(3) e o fato que Φ satisfaz a condição-Δ_2, para demonstrarmos (1), podemos supor sem perda de generalidade que f é real e positiva.

Vamos inicialmente nos certificar que a decomposição de Calderón-Zygmund pode ser aplicada à f. Seja então $t > 0$ e suponha que Q é um cubo tal que

(2) $$f_Q = \frac{1}{\mu(Q)} \int_Q f(x)d\mu > t.$$

Então para cada $x \in Q$ temos

$$t < f_Q \leq Mf(x)$$

e assim, como $Mf \in L^{p_0}$, temos

$$t^{p_0} \leq \frac{1}{\mu(Q)} \int_Q (Mf(x))^{p_0} d\mu \leq \frac{C}{\mu(Q)}$$

implicando em

(3) $$\mu(Q) \leq \frac{C}{t^{p_0}}.$$

Logo se $Q_1 \subset Q_2 \subset \cdots$ (inclusão estríta) é uma família crescente de cubos diádicos tais que

$$\frac{1}{\mu(Q_k)} \int_{Q_k} f(x) d\mu > t$$

segue de (3) e do fato que μ é doubling que tal família é necessariamente finita, pois por (3), $\mu(Q_k)$ é limitada independente de k. Desta forma, cada cubo diádico satisfazendo (2) está contido em um maximal.

Consideremos então $\{Q_j\}$ a família dos cubos diádicos maximais satisfazendo

(4) $$t < f_{Q_j} \leq Ct.$$

Vamos denotar esta família por $\{Q_{t,j}\}$ para indicar a dependência em t. Por 2.4(3) temos que $f(x) \leq t$ para μ-a.e. $x \in \cup Q_{t,j}$. Notemos também que se $t < s < f_{s,j}$, então $Q_{s,j} \subset Q_{t,k}$ para algum k.

Dado $t > 0$ fixemos $Q_0 = Q_{(2C)^{-1}t,j_0}$ e seja $A > 0$ arbitrário. Existem duas possibilidades

(5) $$Q_0 \subset \{x \,:\, M^{\sharp} f(x) > \frac{t}{A}\}$$

ou

(6) $$Q_0 \not\subset \{x \,:\, M^{\sharp} f(x) > \frac{t}{A}\}$$

No primeiro caso temos

(7) $$\sum_{\{t\,:\,Q_{t,j} \subset Q_0\}} \mu(Q_{t,j}) \leq \mu(\{x \,:\, M^{\sharp} f(x) > \frac{t}{A}\})$$

e no segundo caso

(8) $$\frac{1}{\mu(Q_0)} \int_{Q_0} |f(y) - f_{Q_0}| d\mu \leq \frac{t}{A}.$$

Usando (4) temos que

$$f_{Q_0} \leq C(2C)^{-1}t = \frac{t}{2} \tag{9}$$

e novamente por (4) e (9)

$$\begin{aligned}
(t - \frac{t}{2})\mu(Q_{t,j}) &= t\mu(Q_{t,j}) - \frac{t}{2}\mu(Q_{t,j}) \\
&\leq \int_{Q_{t,j}} f(y)d\mu - \mu(Q_{t,j})f_{Q_0} \\
&= \int_{Q_{t,j}} f(y)d\mu - \int_{Q_{t,j}} f_{Q_0}d\mu \\
&\leq \int_{Q_{t,j}} |f(y) - f_{Q_0}|d\mu.
\end{aligned}$$

Assim sendo segue de (8) que

$$\begin{aligned}
\sum_{\{t\,:\,Q_{t,j}\subset Q_0\}} (t - \frac{t}{2})\mu(Q_{t,j}) &\leq \sum_{\{t\,:\,Q_{t,j}\subset Q_0\}} \int_{Q_{t,j}} |f(y) - f_{Q_0}|d\mu \\
&\leq \int_{Q_0} |f(y) - f_{Q_0}|d\mu \\
&\leq A^{-1}t\mu(Q_0)
\end{aligned}$$

consequentemente,

$$\sum_{\{t\,:\,Q_{t,j}\subset Q_0\}} \mu(Q_{t,j}) \leq A^{-1}t\mu(Q_0)\frac{2}{t} = 2A^{-1}\mu(Q_0). \tag{10}$$

Agora, somando sob todos os possíveis Q_0's, usando (7) e (10) temos

$$\sum_j \mu(Q_{t,j}) \leq \mu(\{x \;:\; M^{\sharp}f(x) > \frac{t}{A}\}) + 2A^{-1}\sum_j \mu(Q_{(2C)^{-1}t,j}).$$

Sejam $\alpha(t) = \sum_j \mu(Q_{t,j})$ e $\beta(t) = \mu(\{x \;:\; Mf(x) > t\})$. Segue de (4) que se $x \in \cup Q_{t,j}$ então $Mf(x) > t$, logo $\alpha(t) \leq \beta(t)$. Além disso, da última parte do Teorema 2.4 temos

$$\beta(t) \leq \sum_j \mu(Q^3_{C^{-1}t,j}) \leq C_1\alpha(t/C). \tag{11}$$

Em termos de $\alpha(t)$ temos a seguinte desigualdade

$$\alpha(t) \leq \mu(\{x \;:\; M^{\sharp}f(x) > \frac{t}{A}\}) + 2A^{-1}\alpha(t/2C). \tag{12}$$

Para cada $N > 0$ consideremos

$$I_N = \int_0^N \varphi(t)\alpha(t)dt$$

onde φ é a densidade de Φ. Segue então que

$$I_N \leq \int_0^N \varphi(t)\beta(t)dt. \tag{13}$$

Como Φ satisfaz a condição-Δ_2, segue de I.1.3(3) que existe $r > 1$ tal que

$$\varphi(t) < t^{-1}r\Phi(t) \qquad (t > 0). \tag{14}$$

Além disso, segue de I.1.4(1) e da hipótese que $0 < p_0 < q_\Phi$, que existe $k > 0$ tal que

$$\Phi(st) \leq ks^{p_0}\Phi(t) \qquad (0 \leq s \leq 1\ ,\ t \geq 0). \tag{15}$$

Então, usando (13), (14) e (15) temos

$$\begin{aligned}
I_N &\leq \int_0^N rt^{-1}\Phi(t)\beta(t)dt \\
&= r\int_0^N t^{-1}\Phi(\frac{t}{N}N)\beta(t)dt \\
&\leq r\int_0^N t^{-1}k(\frac{t}{N})^{p_0}\Phi(N)\beta(t)dt \\
&= \frac{kr\Phi(N)}{p_0N^{p_0}}\int_0^N p_0t^{p_0-1}\beta(t)dt \\
&\leq \frac{kr\Phi(N)}{p_0N^{p_0}}\int_{\mathbb{R}^n}(Mf(x))^{p_0}d\mu < \infty.
\end{aligned}$$

Além disso, usando (12) temos

$$I_N \leq \int_0^N \varphi(t)\mu(\{x\ :\ M^\sharp f(x) > \frac{t}{A}\})dt + 2A^{-1}\int_0^N \varphi(t)\alpha(t/2C)dt.$$

Agora, usando I.1.3(4) temos que

$$\begin{aligned}
\int_0^N \varphi(t)\alpha(t/2C)dt &= 2C\int_0^{2CN}\varphi(2Ct)\alpha(t)dt \\
&\leq 2CC'\int_0^{2CN}\varphi(t)\alpha(t)dt.
\end{aligned}$$

Por outro lado, fazendo $A = 8CC'$ e usando novamente I.1.3(4) temos

$$
\begin{aligned}
\int_0^N \varphi(t)\mu(\{x\ :\ M^\sharp f(x) > \frac{t}{8CC'}\})dt &= \\
&= 8CC' \int_0^{8CC'N} \varphi(8CC't)\mu(\{x\ :\ M^\sharp f(x) > t\})dt \\
&\leq C \int_0^{CN} \varphi(t)\mu(\{x\ :\ M^\sharp f(x) > t\})dt.
\end{aligned}
$$

donde,

$$
\begin{aligned}
I_N &\leq C \int_0^{CN} \varphi(t)\mu(\{x\ :\ M^\sharp f(x) > t\})dt + 2CC'2(8CC')^{-1} \int_0^{2CN} \varphi(t)\alpha(t)dt \\
&= C \int_0^{CN} \varphi(t)\mu(\{x\ :\ M^\sharp f(x) > t\})dt + \frac{1}{2} \int_0^{2CN} \varphi(t)\alpha(t)dt
\end{aligned}
$$

e então, fazendo $N \to \infty$ segue que

$$
\int_0^\infty \varphi(t)\alpha(t)dt \leq C \int_0^\infty \varphi(t)\mu(\{x\ :\ M^\sharp f(x) > t\})dt. \tag{16}
$$

Finalmente, usando (11), (16) e I.1.3(4) temos

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(Mf(x))d\mu &= \int_0^\infty \varphi(t)\beta(t)dt \\
&\leq C_1 \int_0^\infty \varphi(t)\alpha(t/C)dt \\
&= C_1 C \int_0^\infty \varphi(Ct)\alpha(t)dt \\
&\leq C \int_0^\infty \varphi(t)\alpha(t)dt \\
&\leq C \int_0^\infty \varphi(t)\mu(\{x\ :\ M^\sharp f(x) > t\})dt \\
&= C \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(M^\sharp f(x))d\mu
\end{aligned}
$$

onde C é uma constante que não depende de f. Fica então demonstrado o teorema.

3.2. COROLÁRIO: Com as hipóteses do Teorema 3.1 temos

$$
||Mf||_{L^\Phi} \leq C||M^\sharp f||_{L^\Phi}. \tag{1}
$$

Demonstração. Novamente vamos supor f real e positiva. Segue do Teorema 3.1 que

(2) $$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(Mf(x))d\mu \leq C \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(M^\sharp f(x))d\mu.$$

Suponhamos que $\lambda_1 = ||M^\sharp f||_{L^\Phi} > 0$ e seja $\lambda_2 = ||Mf||_{L^\Phi}$. Se $\lambda_2 \leq \lambda_1$ nada resta a demonstrar. Vamos supor então que $\lambda_1 < \lambda_2$ e tomemos α_1, α_2 tais que $\lambda_1 < \alpha_1 < \alpha_2 < \lambda_2$. Assim segue da convexidade de Φ que

$$\begin{aligned}
\alpha_2\alpha_1^{-1} &< \alpha_2\alpha_1^{-1} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi\left(\frac{Mf(x)}{\alpha_2}\right) d\mu \\
&= \alpha_2\alpha_1^{-1} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi\left(\alpha_1\alpha_2^{-1}\frac{Mf(x)}{\alpha_1}\right) d\mu \\
&\leq \alpha_2\alpha_1^{-1}\alpha_1\alpha_2^{-1} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi\left(\frac{Mf(x)}{\alpha_1}\right) d\mu \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \Phi\left(\frac{Mf(x)}{\alpha_1}\right) d\mu.
\end{aligned}$$

Notemos agora que para $\alpha > 0$ temos

$$M(\alpha f)(x) = \sup \frac{1}{\mu(Q)} \int_Q (\alpha f)(x)d\mu = \alpha Mf(x)$$

e

$$(\alpha f)_Q = \frac{1}{\mu(Q)} \int_Q (\alpha f)(x)d\mu = \alpha f_Q,$$

logo

$$M^\sharp(\alpha f)(x) = \sup \frac{1}{\mu(Q)} \int_Q |(\alpha f)(x) - (\alpha f)_Q|d\mu = \alpha M^\sharp f(x).$$

Assim, usando (2) e I.2.2(5)

$$\begin{aligned}
\alpha_2\alpha_1^{-1} &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \Phi\left(M(\frac{f}{\alpha_1})(x)\right) d\mu \\
&\leq C \int_{\mathbb{R}^n} \Phi\left(M^\sharp(\frac{f}{\alpha_1})(x)\right) d\mu \\
&= C \int_{\mathbb{R}^n} \Phi\left(\frac{M^\sharp f(x)}{\alpha_1}\right) d\mu \\
&\leq C \int_{\mathbb{R}^n} \Phi\left(\frac{M^\sharp f(x)}{\lambda_1}\right) d\mu \leq C
\end{aligned}$$

ou seja $\alpha_2 \leq C\alpha_1$ quaisquer que sejam α_1 e α_2 com $\lambda_1 < \alpha_1 < \alpha_2 < \lambda_2$. Logo, por um processo limite temos que

$$||Mf||_{L^\Phi} \leq C||M^\sharp f||_{L^\Phi}.$$

3.3. O espaço $BMO(E)$, das funções de **oscilação média limitada**, é definido como o espaço das funções $f \in L^1_{loc}(E)$ tais que $M^\sharp f \in L^\infty$.

Para $f \in BMO(E)$ definimos

(1) $$||f||_{BMO(E)} = ||M^\sharp f||_{L^\infty}.$$

Após identificação de funções que diferem por constantes temos que $||\cdot||_{BMO(E)}$ é uma norma que torna $BMO(E)$ um espaço de Banach.

Finalmente vamos passar ao teorema que extende o teorema de interpolação de Fefferman-Stein.

3.4. TEOREMA: Sejam E e F espaços de Banach e Φ uma função de Orlicz que juntamente com sua conjugada satisfaçam a condição-Δ_2. Seja T um operador linear tal que

(1) $$T \,:\, L^{p_0}(E) \longrightarrow L^{p_0}(F)$$

continuamente para algum p_0, com $1 < p_0 < q_\Phi$, e

(2) $$T \,:\, L^\infty(E) \longrightarrow BMO(F)$$

continuamente. Então

(3) $$T \,:\, L^\Phi(E) \longrightarrow L^\Phi(F)$$

de maneira contínua.

Demonstração. Se $f \in L^{p_0}(E)$ segue de (1), 1.2(1) e 1.4(2) que

(4) $$||M^\sharp \circ Tf||_{L^{p_0}} \leq C||Tf||_{L^{p_0}(F)} \leq C||f||_{L^{p_0}(E)}$$

Por outro lado, como por definição temos $||M^\sharp f||_{L^\infty} = ||f||_{BMO(F)}$, usando (2) segue que

(5) $$||M^\sharp \circ Tf||_{L^\infty} = ||Tf||_{BMO(F)} \leq C||f||_{L^\infty(E)}$$

Mas segue de (4) e (5) que $M^\sharp \circ T$ é do tipo-fraco $(L^{p_0}(E), L^{p_0})$ e $(L^\infty(E), L^\infty)$. Assim, segue do Teorema I.2.4 que

(6) $$||M^\sharp \circ Tf||_{L^\Phi} \leq C||f||_{L^\Phi(E)}$$

Agora, como por 2.2 temos $||Tf(x)||_F \leq M \circ Tf(x)$ μ-a.e., segue que

(7) $$||Tf||_{L^\Phi(F)} \leq ||M \circ Tf||_{L^\Phi}.$$

Logo, segue de (6), (7) e do Corolário 3.2 que

$$||Tf||_{L^\Phi(F)} \leq ||M \circ Tf||_{L^\Phi} \leq C||M^\sharp \circ Tf||_{L^\Phi} \leq C||f||_{L^\Phi(E)}$$

o que demonstra (3).

CAPÍTULO III

O MÉTODO DE INTERPOLAÇÃO $< \, , \, >_{\rho,p}$

Em [12], J.Gustavsson e J.Peetre introduziram um método de interpolação apropriado para interpolar espaços de Orlicz. Neste capítulo, introduziremos uma variante do método de Gustavsson- Peetre, e demonstraremos alguns resultados para esta variante, que são aqueles que essencialmente usaremos no decorrer deste trabalho. Outros resultados como dualidade, reiteração, etc, pretendemos tentar estabelecer futuramente.

O objetivo inicial (e principal) de nosso trabalho era procurar demonstrar que o método de Gustavsson-Peetre comutava com os espaços L^p. Infelizmente, encontramos diversas dificuldades, que não conseguimos transpor. Mas, por outro lado, essas dificuldades mostravam que algumas modificações no método poderiam levar à comutação desejada. Isto de fato aconteceu, e mais ainda, todas as propriedades estabelecidas para o método de Gustavsson- Peetre mostraram-se válidas também para a variante introduzida.

1. A DEFINIÇÃO DO MÉTODO $< \, , \, >_{\rho,p}$

O método que introduziremos dependerá de um parâmetro funcional tomado em uma conveniente classe de funções.

1.1. Por $\mathcal{P}$ indicaremos a classe das funções $\rho : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$ que são positivas em $(0,\infty)$ e **quase-concavas**, isto é,

$$\rho(st) \leq C \max(1,t)\rho(s) \qquad (s,t > 0). \tag{1}$$

Se $\rho \in \mathcal{P}$ então segue de (1) que $\rho(t)$ é "quase-crescente" e $\rho(t)/t$ é "quase-decrescente", isto é, para $0 < t_0 < t_1$ temos

$$\rho(t_0) \leq C\rho(t_1) \qquad \text{e} \qquad \frac{\rho(t_1)}{t_1} \leq C\frac{\rho(t_0)}{t_0}. \tag{2}$$

Indicaremos por $\mathcal{P}^{+-}$ a subclasse das funções $\rho \in \mathcal{P}$ tais que

$$\overline{\rho}(t) = \sup_{s>0} \frac{\rho(st)}{\rho(s)} = o(\max(1,t)). \tag{3}$$

onde entendemos pela expressão $f(x) = o(g(x))$ que o quociente $f(x)/g(x)$ tende a zero quando x tende a zero e quando x tende a infinito.

A expressão $R(s,t) = s\rho(t/s)$ é bem definida para $s > 0$ e quando $s = 0$, colocaremos por definição $R(0,t) = 0$.

Se $\rho \in \mathcal{P}^{+-}$ existe uma função concava ρ_0 tal que $\rho \sim \rho_0$, isto é, existem constantes C_1 e C_2 tais que $C_1\rho_0(t) \leq \rho(t) \leq C_2\rho_0(t)$ (ver [17]).

1.2. LEMA: Se ρ é uma função concava então a função R definida acima também é concava.

Demonstração. Sejam $\alpha, \beta \geq 0$ com $\alpha+\beta = 1$ e (s_1,t_1), (s_2,t_2) quaisquer com $s_i, t_i \geq 0$, $i = 0,1$. Então

$$\begin{aligned}
R(\alpha(s_1,t_1)+\beta(s_2,t_2)) &= R(\alpha s_1+\beta s_2, \alpha t_1+\beta s_2) \\
&= (\alpha s_1+\beta s_2)\rho\left(\frac{\alpha t_1}{\alpha s_1+\beta s_2}+\frac{\beta t_2}{\alpha s_1+\beta s_2}\right) \\
&= (\alpha s_1+\beta s_2)\rho\left(\frac{t_1}{s_1}\frac{\alpha s_1}{\alpha s_1+\beta s_2}+\frac{t_2}{s_2}\frac{\beta s_2}{\alpha s_1+\beta s_2}\right) \\
&= (\alpha s_1+\beta s_2)\rho\left(\frac{t_1}{s_1}\frac{\alpha s_1}{\alpha s_1+\beta s_2}+\frac{t_2}{s_2}\left(1-\frac{\alpha s_1}{\alpha s_1+\beta s_2}\right)\right) \\
&\geq (\alpha s_1+\beta s_2)\left(\frac{\alpha s_1}{\alpha s_1+\beta s_2}\rho(\frac{t_1}{s_1})+\left(1-\frac{\alpha s_1}{\alpha s_1+\beta s_2}\right)\rho(\frac{t_2}{s_2})\right) \\
&= \alpha s_1\rho(\frac{t_1}{s_1})+\beta s_2\rho(\frac{t_2}{s_2}) \\
&= \alpha R(s_1,t_1)+\beta R(s_2,t_2).
\end{aligned}$$

o que prova o Lema.

1.3. As **funções de Rademacher** $r_i : [0,1] \longrightarrow \{-1,1\}$, $i = 0,1,2,\cdots$ são definidas como se segue. A primeira r_0 vale 1 em $[0,\frac{1}{2})$ e -1 em $[\frac{1}{2},1]$; a segunda r_1 vale 1 em $[0,\frac{1}{4}) \cup [\frac{1}{2},\frac{3}{4})$ mas vale -1 em $[\frac{1}{4},\frac{1}{2}) \cup [\frac{3}{4},1]$ e assim por diante.

A partir das funções de Rademacher vamos definir para $n \in \mathbb{Z}$,

$$\tilde{r}_n = \begin{cases} r_{2n}, & \text{se } n \geq 0, \\ r_{2|n|-1} & \text{se } n < 0. \end{cases}$$

Sejam E um espaço de Banach, F um subconjunto finito qualquer de $\mathbb{Z}$ e $(\tilde{r}_{i_n})_{n\in F}$, $(\tilde{r}_{j_n})_{n\in F}$ duas subsequências finitas de $(\tilde{r}_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Como todas as funções de Rademacher têm a mesma função distribuição, segue que se $(a_n)_{n\in F}$ é uma sequência finita e arbitária de elementos de E então

$$(1) \qquad \int_0^1 \|\sum_{n\in F}\tilde{r}_{i_n}(t)a_n\|_E^p dt = \int_0^1 \|\sum_{n\in F}\tilde{r}_{j_n}(t)a_n\|_E^p dt,$$

onde $1 \leq p < \infty$.

1.4. Seja (E_0, E_1) um **par de Banach,** isto é, E_0 e E_1 são espaços de Banach ambos continuamente imersos em um mesmo espaço vetorial topológico de Hausdorff.

O espaço intersecção $E_0 \cap E_1$ é um espaço de Banach quando munido da norma

$$||x||_{E_0 \cap E_1} = \max(||x||_{E_0}, ||x||_{E_1}).$$

O espaço soma $E_0 + E_1$ também é um espaço de Banach quando munido da norma

$$||x||_{E_0 + E_1} = \inf\{||x_0||_{E_0} + ||x_1||_{E_1}\}$$

onde o ínfimo é tomado sobre todas as decomposições $x = x_0 + x_1$, $x_i \in E_i$, $i = 0, 1$.

1.5. Lembremos que dada uma sequência $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ de elementos de um espaço vetorial normado E, dizemos que essa sequência é **somável** e tem por soma $a \in E$, e escrevemos $a = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n$, se, dado $\varepsilon > 0$, existe um subconjunto finito $F_\varepsilon \subset \mathbb{Z}$ tal que, para todo subconjunto finito $F \subset \mathbb{Z}$ com $F_\varepsilon \subset F$ temos

$$||a - \sum_{n \in F} a_n||_E < \varepsilon$$

Lembremos também que uma sequência $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ de elementos de um espaço vetorial normado E satisfaz a **condição de Cauchy** se, dado $\varepsilon > 0$, existe um subconjunto finito $F_\varepsilon \subset \mathbb{Z}$ tal que, se $F' \subset \mathbb{Z}$ é finito e $F' \cap F_\varepsilon = \emptyset$ temos

$$|| \sum_{n \in F'} a_n||_E < \varepsilon$$

O Critério de Cauchy nos diz que se E é um espaço de Banach então uma condição necessária e suficiente para que uma sequência de elementos de E seja somável é que satisfaça a condição de Cauchy.

Outro resultado que utilizaremos com frequência é que um espaço vetorial normado é completo se e somente se toda sequência $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ de elementos de E que é **absolutamente somável** ($(||a_n||_E)_{n \in \mathbb{Z}}$ é somável), deve ser somável.

1.6. Seja (E_0, E_1) um par de Banach. O espaço $< E_0, E_1 >_{\rho, p}$, $1 \leq p \leq \infty$, é o espaço vetorial dos elementos $a \in E_0 + E_1$ tais que existe uma sequência $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ em $E_0 \cap E_1$ que satisfaz

$$(1) \qquad a = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \quad (\text{ convergência em } E_0 + E_1 \text{ }),$$

$$(2) \qquad \max_{k=0,1} \sup_F || \sum_F \tilde{r}_n(\cdot) \frac{2^{kn}}{\rho(2^n)} a_n ||_{L^p([0,1], E_k)} < \infty,$$

onde o supremo é tomado sobre todos os subconjuntos finitos de $\mathbb{Z}$, e

(3) $$(\tilde{r}_n(\cdot)\frac{2^{kn}}{\rho(2^n)}a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \quad \text{é somável em } L^p([0,1],E_k)\ ,\ k=0,1.$$

Uma sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ em $E_0 \cap E_1$ que satisfaz (1), (2) e (3) será chamada uma **sequência admissível** para a com relação ao par (E_0, E_1).

Equipamos o espaço $< E_0, E_1 >_{\rho,p}$ com a norma

$$||a||_{<E_0,E_1>_{\rho,p}} = \inf \max_{k=0,1} \sup_F ||\sum_F \tilde{r}_n(\cdot)\frac{2^{kn}}{\rho(2^n)}a_n||_{L^p([0,1],E_k)}$$

onde o ínfimo é tomado sobre todas as sequências admissíveis para a.

No que se segue o seguinte resultado nos será útil.

1.7. LEMA: Se $\rho \in \mathcal{P}^{+-}$ e $1 \le p \le \infty$ então $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\min(\rho(2^n), \frac{\rho(2^n)}{2^n})\right)^p$, é convergente.

Demonstração. Inicialmente temos que para $\rho \in \mathcal{P}^{+-}$ e $s > 0$ vale ([12])

(1) $$\left(\int_0^\infty \left(\min(1,\frac{s}{t})\rho(t)\right)^p \frac{dt}{t}\right)^{1/p} \le C\rho(s)$$

com a modificação usual se $p = \infty$. Fazendo $s = 1$ em (1) e usando 1.1(2) temos

$$\begin{aligned}
C^p &\ge \sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{2^n}^{2^{n+1}}\left(\min(1,\frac{1}{t})\rho(t)\right)^p\frac{dt}{t}\\
&\ge C_1^p\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{2^n}^{2^{n+1}}\left(\min(1,\frac{1}{t})\rho(2^n)\right)^p\frac{dt}{t}\\
&\ge C_1^p\sum_{n=-\infty}^{-1}\int_{2^n}^{2^{n+1}}\left(\min(1,\frac{1}{t})\rho(2^n)\right)^p\frac{dt}{t} + C_1^p\sum_{n=0}^{\infty}\int_{2^n}^{2^{n+1}}\left(\min(1,\frac{1}{t})\rho(2^n)\right)^p\frac{dt}{t}.
\end{aligned}$$

Agora, para $n \le -1$ temos $2^n < 1$ e na primeira integral da última desigualdade acima temos $t \le 2^{n+1} < 2$, ou seja, $\frac{1}{2} < \frac{1}{t}$. Além disso, na segunda integral temos que $2^{n+1} \ge t \ge 2^n \ge 1$ e então $\frac{1}{t} \le 1$. Logo

$$\begin{aligned}
C^p &\ge \sum_{n=-\infty}^{-1}\int_{2^n}^{2^{n+1}}\left(\frac{\rho(2^n)}{2}\right)^p\frac{dt}{t} + \sum_{n=0}^{\infty}\int_{2^n}^{2^{n+1}}\left(\frac{\rho(2^n)}{t}\right)^p\frac{dt}{t}\\
&\ge \frac{\log 2}{2^p}\sum_{n=-\infty}^{-1}(\rho(2^n))^p + \sum_{n=0}^{\infty}\int_{2^n}^{2^{n+1}}\left(\frac{1}{2}\frac{\rho(2^n)}{2^n}\right)^p\frac{dt}{t}
\end{aligned}$$

$$= \frac{\log 2}{2^p} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\min(\rho(2^n), \frac{\rho(2^n)}{2^n})\right)^p$$

o que prova o Lema.

1.8. OBSERVAÇÕES: 1.) A condição 1.6(3) implica em 1.6(2). Com efeito: como $L^p([0,1], E_k)$, $k = 0, 1$, é completo, segue de 1.6(3) que a sequência $(\tilde{r}_n(\cdot)2^{kn}a_n/\rho(2^n))_{n\in\mathbb{Z}}$ satisfaz a condição de Cauchy, e assim, dado $\varepsilon > 0$, existe $F_\varepsilon \subset \mathbb{Z}$ finito tal que se $F \cap F_\varepsilon = \emptyset$ com $F \subset \mathbb{Z}$ finito então

$$\|\sum_F \tilde{r}_n(\cdot)\frac{2^{kn}}{\rho(2^n)}a_n\|_{L^p([0,1],E_k)} < \varepsilon.$$

Por outro lado se $F \cap F_\varepsilon \neq \emptyset$ então

$$\begin{aligned}
&\|\sum_F \tilde{r}_n(\cdot)\frac{2^{kn}}{\rho(2^n)}a_n\|_{L^p([0,1],E_k)} \leq \\
&\leq \|\sum_{F-F_\varepsilon} \tilde{r}_n(\cdot)\frac{2^{kn}}{\rho(2^n)}a_n\|_{L^p([0,1],E_k)} + \|\sum_{F\cap F_\varepsilon} \tilde{r}_n(\cdot)\frac{2^{kn}}{\rho(2^n)}a_n\|_{L^p([0,1],E_k)} \\
&< \varepsilon + \|\sum_{F\cap F_\varepsilon} \tilde{r}_n(\cdot)\frac{2^{kn}}{\rho(2^n)}a_n\|_{L^p([0,1],E_k)}
\end{aligned}$$

Segue então que

$$\sup_F \|\sum_F \tilde{r}_n(\cdot)\frac{2^{kn}}{\rho(2^n)}a_n\|_{L^p([0,1],E_k)} \leq \varepsilon + \max_{F\subset F_\varepsilon} \|\sum_F \tilde{r}_n(\cdot)\frac{2^{kn}}{\rho(2^n)}a_n\|_{L^p([0,1],E_k)} < +\infty$$

pois existe somente uma quantidade finita de subconjuntos F de $\mathbb{Z}$ com $F \subset F_\varepsilon$.

2.) A condição 1.6(2) implica na convergência da série que aparece em 1.6(1). De fato:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=-\infty}^{\infty} \|a_n\|_{E_0+E_1} &\leq \sum_{n=-\infty}^{-1} \|a_n\|_{E_0} + \sum_{n=0}^{\infty} \|a_n\|_{E_1} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{-1} \rho(2^n)\|\frac{a_n}{\rho(2^n)}\|_{E_0} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho(2^n)}{2^n}\|\frac{2^n}{\rho(2^n)}a_n\|_{E_1} \\
&\leq \left(\sum_{-\infty}^{\infty} \min\left(\rho(2^n), \frac{\rho(2^n)}{2^n}\right)\right) \max_{k=0,1} \sup_F \|\sum_F \tilde{r}_n(\cdot)\frac{2^{kn}}{\rho(2^n)}a_n\|_{L^p([0,1],E_k)}
\end{aligned}$$

Agora o Lema 1.7 conclui a demonstração.

3.) Se ρ_0 e ρ_1 são dois parâmetros funcionais em $\mathcal{P}^{+-}$ tais que $\rho_0 \sim \rho_1$ então

$$< E_0, E_1 >_{\rho_0,p} = < E_0, E_1 >_{\rho_1,p}$$

com equivalência de normas, qualquer que seja o par de Banach (E_0, E_1) e $1 \leq p \leq \infty$.

4.) Uma parte dos resultados que obtivemos neste trabalho poderiam ainda ser obtidos se o nosso método de interpolação fosse definido sem a condição 1.6(3). Contudo para outros resultados essa condição é tecnicamente vantajosa, como por exemplo o resultado de densidade que vamos apresentar mais adiante.

2. PROPRIEDADES DE $< , >_{\rho,p}$

2.1. TEOREMA: Seja (E_0, E_1) um par de Banach, $\rho \in \mathcal{P}^{+-}$ e $1 \leq p \leq \infty$. Então $< E_0, E_1 >_{\rho,p}$ é um espaço de Banach.

Demonstração. Seja $\Lambda_{\rho,p} = \Lambda_{\rho,p}(E_0, E_1)$ o espaço vetorial de todas as sequências $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ em $E_0 \cap E_1$ tais que

$$||(a_n)||_{\Lambda_{\rho,p}} = \max_{k=0,1} \sup_F || \sum_F \tilde{r}_n(\cdot) \frac{2^{kn}}{\rho(2^n)} a_n ||_{L^p([0,1],E_k)} < +\infty$$

e $(\tilde{r}_n(\cdot)2^{kn}a_n/\rho(2^n))_{n\in\mathbb{Z}}$ é somável em $L^p([0,1], E_k)$. É fácil ver que $||\cdot||_{\Lambda_{\rho,p}}$ é uma norma.

Vamos verificar que $\Lambda_{\rho,p}$ é completo. Consideremos então $(a_i)_{i=0}^{\infty} = ((a_n^i)_{n\in\mathbb{Z}})_{i=0}^{\infty}$ uma sequência em $\Lambda_{\rho,p}$, absolutamente somável, ou seja

$$\sum_{i=0}^{\infty} ||a_i||_{\Lambda_{\rho,p}} < +\infty.$$

Notemos inicialmente que para cada $n \in \mathbb{Z}$ temos

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{\infty} ||a_n^i||_{E_0\cap E_1} &\leq \sum_{i=0}^{\infty} (||a_n^i||_{E_0} + ||a_n^i||_{E_1}) \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} (||\rho(2^n) \frac{a_n^i}{\rho(2^n)}||_{E_0} + ||\frac{\rho(2^n)}{2^n} \frac{2^n}{\rho(2^n)} a_n^i||_{E_1}) \\
&\leq \max\left(\rho(2^n), \frac{\rho(2^n)}{2^n}\right) \sum_{i=0}^{\infty} (||\frac{a_n^i}{\rho(2^n)}||_{E_0} + ||\frac{2^n}{\rho(2^n)} a_n^i||_{E_1}) \\
&\leq \max\left(\rho(2^n), \frac{\rho(2^n)}{2^n}\right) \sum_{i=0}^{\infty} \max_{k=0,1} \sup_F || \sum_F \tilde{r}_n(\cdot) \frac{2^{kn}}{\rho(2^n)} a_n^i ||_{L^p([0,1],E_k)} \\
&= \max\left(\rho(2^n), \frac{\rho(2^n)}{2^n}\right) \sum_{i=0}^{\infty} ||a_n^i||_{\Lambda_{\rho,p}} < +\infty.
\end{aligned}$$

Então, $(a_n^i)_{i=0}^{\infty}$, $n \in \mathbb{Z}$, é absolutamente somável em $E_0 \cap E_1$ que é completo. Seja $a_n \in E_0 \cap E_1$, $n \in \mathbb{Z}$, tal que

$$a_n = \sum_{i=0}^{\infty} a_n^i \quad (\text{ convergência em } E_0 \cap E_1 \text{ })$$

Seja $a = (a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ e vamos provar que $a \in \Lambda_{\rho,p}$. Temos que

$$\begin{aligned}
||(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}||_{\Lambda_{\rho,p}} &= \max_{k=0,1} \sup_F ||\sum_F \tilde{r}_n(\cdot)\frac{2^{kn}}{\rho(2^n)}a_n||_{L^p([0,1],E_k)} \\
&= \max_{k=0,1} \sup_F ||\sum \tilde{r}_n(\cdot)\frac{2^n}{\rho(2^n)}(\sum_{i=0}^{\infty} a_n^i)||_{L^p([0,1],E_k)} \\
&\leq \max_{k=0,1} \sup_F \sum_{i=0}^{\infty} ||\sum_F \tilde{r}_n(\cdot)\frac{2^{kn}}{\rho(2^n)}a_n^i||_{L^p([0,1],E_k)} \\
&\leq \sum_{i=0}^{\infty} \max_{k=0,1} \sup_F ||\sum_F \tilde{r}_n(\cdot)\frac{2^{kn}}{\rho(2^n)}a_n^i||_{L^p([0,1],E_k)} \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} ||a_i||_{\Lambda_{\rho,p}} < +\infty.
\end{aligned}$$

Falta somente demostrar que $(\tilde{r}_n(\cdot)2^{kn}a_n/\rho(2^n))_{n\in\mathbb{Z}}$ é somável em $L^p([0,1],E_k)$. Sabemos que dado $\varepsilon > 0$ existe $i_0 \in \mathbb{N}$, tal que se $j \geq i_0$ então

$$\sum_{i=j+1}^{\infty} ||a_i||_{\Lambda_{\rho,p}} < \varepsilon.$$

Além disso, como para cada $i \in \mathbb{N}$ temos que $(\tilde{r}_n(\cdot)2^{kn}a_n^i/\rho(2^n))_{n\in\mathbb{Z}}$ é somável em $L^p([0,1],E_k)$ e portanto satisfaz o critério de Cauchy, segue que dado $\varepsilon > 0$ existe $F_\varepsilon^i \subset \mathbb{Z}$ finito tal que se $F' \cap F_\varepsilon^i = \emptyset$ com $F' \subset \mathbb{Z}$ finito então

$$||\sum_{F'} \tilde{r}_n(\cdot)\frac{2^{kn}}{\rho(2^n)}a_n^i||_{L^p([0,1],E_k)} < \frac{\varepsilon}{2^i}.$$

Vamos considerar $F_\varepsilon = \cup_{i=0}^{i_0} F_\varepsilon^i$ e $F' \subset \mathbb{Z}$ finito com $F' \cap F_\varepsilon = \emptyset$. Para tais F' temos que $F' \cap F_\varepsilon^i = \emptyset$ se $i \leq i_0$, e assim

$$\begin{aligned}
&||\sum_{F'} \tilde{r}_n(\cdot)\frac{2^{kn}}{\rho(2^n)}a_n||_{L^p([0,1],E_k)} = ||\sum_{F'} \tilde{r}_n(\cdot)\frac{2^{kn}}{\rho(2^n)}(\sum_{i=0}^{\infty} a_n^i)||_{L^p([0,1],E_k)} \\
&\leq \sum_{i=0}^{\infty} ||\sum_{F'} \tilde{r}_n(\cdot)\frac{2^{kn}}{\rho(2^n)}a_n^i||_{L^p([0,1],E_k)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^{i_0} || \sum_{F'} \tilde{r}_n(\cdot) \frac{2^{kn}}{\rho(2^n)} a_n^i ||_{L^p([0,1],E_k)} + \sum_{i=i_0+1}^{\infty} || \sum_{F'} \tilde{r}_n(\cdot) \frac{2^{kn}}{\rho(2^n)} a_n^i ||_{L^p([0,1],E_k)} \\
&\leq \sum_{i=0}^{i_0} \frac{\varepsilon}{2^i} + \sum_{i=i_0+1}^{\infty} \max_{k=0,1} \sup_{F} || \sum_{F} \tilde{r}_n(\cdot) \frac{2^{kn}}{\rho(2^n)} a_n^i ||_{L^p([0,1],E_k)} \\
&\leq \sum_{i=0}^{i_0} \frac{\varepsilon}{2^i} + \sum_{i=i_0+1}^{\infty} ||a_i||_{\Lambda_{\rho,p}} < 2\varepsilon,
\end{aligned}
$$

o que mostra que $(\tilde{r}_n(\cdot)2^{kn}a_n/\rho(2^n))_{n\in\mathbb{Z}}$ satisfaz o critério de Cauchy e portanto é somável em $L^p([0,1],E_k)$, donde concluímos que $a \in \Lambda_{\rho,p}$.

Vamos demonstrar agora que $a = \sum_{i=0}^{\infty} a_i$ em $\Lambda_{\rho,p}$. Seja então $\varepsilon > 0$ e j suficientemente grande para que

$$
\sum_{i=j+1}^{\infty} ||a_i||_{\Lambda_{\rho,p}} < \varepsilon.
$$

Como $a_n = \sum_{i=0}^{\infty} a_n^i$ em $E_0 \cap E_1$ segue que $a_n - \sum_{i=0}^{j} a_n^i = \sum_{i=j+1}^{\infty} a_n^i$ e então

$$
\begin{aligned}
||a - \sum_{i=0}^{j} a_i||_{\Lambda_{\rho,p}} &= ||(a_n) - \sum_{i=0}^{j}(a_n^i)||_{\Lambda_{\rho,p}} \\
&= ||(\sum_{i=j+1}^{\infty} a_n^i)||_{\Lambda_{\rho,p}} \\
&= \max_{k=0,1} \sup_{F} || \sum_{F} \tilde{r}_n(\cdot) \frac{2^n}{\rho(2^{kn})} (\sum_{i=j+1}^{\infty} a_n^i)||_{L^p([0,1],E_k)} \\
&\leq \sum_{i=j+1}^{\infty} ||a_i||_{\Lambda_{\rho,p}} < \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Isto mostra que $a = \sum_{i=0}^{\infty} a_i$ e consequentemente que $\Lambda_{\rho,p}$ é completo.

A seguir consideremos o subespaço

$$
\mathcal{N} = \{(a_n) \in \Lambda_{\rho,p} \ : \ \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n = 0 \quad (\text{ convergência em } E_0 + E_1 \ ) \ \}
$$

e vamos mostrar que $\mathcal{N}$ é fechado em $\Lambda_{\rho,p}$. Seja então $(a_i)_{i=0}^{\infty} = ((a_n^i)_{n\in\mathbb{Z}})_{i=0}^{\infty}$ uma sequência em $\mathcal{N}$ e $a = (a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \Lambda_{\rho,p}$ tal que $a_i \to a$ em $\Lambda_{\rho,p}$, e vamos provar que $a \in \mathcal{N}$. Temos que

$$
||\frac{2^{kn}}{\rho(2^n)} a_n^i - a_n||_{E_k} \leq ||a_i - a||_{\Lambda_{\rho,p}} \quad (k = 0, 1)
$$

para cada $n \in \mathbb{Z}$. Então dado $\varepsilon > 0$, existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $i \geq i_0$ e $n \in \mathbb{Z}$ temos

$$||\frac{2^{kn}}{\rho(2^n)}a_n^i - a_n||_{E_k} < \varepsilon \quad (k = 0, 1).$$

Além disso, existe $F_\varepsilon^i \subset \mathbb{Z}$ finito tal que se $F \subset \mathbb{Z}$ é finito com $F_\varepsilon^i \subset F$ então

$$||\sum_F a_n^i||_{E_0+E_1} < \varepsilon$$

pois $a_i \in \mathcal{N}$. Finalmente tomando $F_\varepsilon = F_\varepsilon^{i_0}$ segue que se $F \subset \mathbb{Z}$ é finito com $F_\varepsilon \subset F$ temos

$$\begin{aligned}
||\sum_F a_n||_{E_0+E_1} &\leq ||\sum_F a_n^{i_0} - a_n||_{E_0+E_1} + ||\sum_F a_n^{i_0}||_{E_0+E_1} \\
&\leq ||\sum_{F_+} a_n^{i_0} - a_n||_{E_0+E_1} + ||\sum_{F_-} a_n^{i_0} - a_n||_{E_0+E_1} + \varepsilon \\
&\leq \sum_{F_+} ||a_n^{i_0} - a_n||_{E_1} + \sum_{F_-} ||a_n^{i_0} - a_n||_{E_0} + \varepsilon \\
&\leq \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon \frac{\rho(2^n)}{2^n} + \sum_{n=-\infty}^{-1} \varepsilon\rho(2^n) + \varepsilon \\
&= \varepsilon(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \min(\frac{\rho(2^n)}{2^n}, \rho(2^n)) + 1)
\end{aligned}$$

e usando o Lema 1.7 segue que

$$||\sum_F a_n||_{E_0+E_1} < C\varepsilon$$

donde concluímos que $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n = 0$ com convergência em $E_0 + E_1$. Logo $\mathcal{N}$ é fechado em $\Lambda_{\rho,p}$. Desta forma o espaço quociente $\Lambda_{\rho,p}/\mathcal{N}$ é um espaço de Banach munido com a norma

$$||(a_n) + \mathcal{N}||_* = \inf_{(b_n)\in(a_n)+\mathcal{N}} ||(b_n)||_{\Lambda_{\rho,p}}$$

Consideremos agora a aplicação $T :< E_0, E_1 >_{\rho,p} \longrightarrow \Lambda_{\rho,p}/\mathcal{N}$ definida como se segue. Seja $a \in < E_0, E_1 >_{\rho,p}$ e $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ uma sequência admissível para a. Definimos então $Ta = (a_n) + \mathcal{N}$. Observemos que T está bem definida pois se tomarmos (a_n) e (b_n) duas sequências admissíveis para a segue de 1.6(1) que $\sum_{n=-\infty}^{\infty}(a_n - b_n) = 0$, o que mostra que $(a_n - b_n) = (a_n) - (b_n) \in \mathcal{N}$, ou seja $a_n + \mathcal{N} = b_n + \mathcal{N}$. Fica também provado que T é uma aplicação injetora. Vejamos que T é sobrejetora. Segue da definição de $\Lambda_{\rho,p}$ que se $(a_n) + \mathcal{N} \in \Lambda_{\rho,p}/\mathcal{N}$ então

$$\|\frac{2^{kn}}{\rho(2^n)}a_n\|_{E_k} \leq \|(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}\|_{\Lambda_{\rho,p}} \quad (k=0,1)$$

e usando o Lema 1.7 temos

$$\begin{aligned}
\sum_{n=-\infty}^{\infty} \|a_n\|_{E_0+E_1} &= \sum_{n=-\infty}^{-1} \|a_n\|_{E_0+E_1} + \sum_{n=0}^{\infty} \|a_n\|_{E_0+E_1} \\
&\leq \sum_{n=-\infty}^{-1} \|a_n\|_{E_0} + \sum_{n=0}^{\infty} \|a_n\|_{E_1} \\
&\leq \sum_{n=-\infty}^{-1} \rho(2^n)\|(a_n)\|_{\Lambda_{\rho,p}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho(2^n)}{2^n}\|(a_n)\|_{\Lambda_{\rho,p}} \\
&= \|(a_n)\|_{\Lambda_{\rho,p}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \min(\rho(2^n), \frac{\rho(2^n)}{2^n}) < +\infty.
\end{aligned}$$

Logo $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ é absolutamente somável em $E_0 + E_1$, e consequentemente existe $a \in E_0 + E_1$ tal que

$$a = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \quad (\text{convergência em } E_0 + E_1)$$

e como $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \Lambda_{\rho,p}$, segue que $a \in < E_0, E_1 >_{\rho,p}$ e $Ta = (a_n) + \mathcal{N}$, ou seja T é sobrejetora. Além disso T é linear, pois se $\alpha \in \mathbb{R}$, $a, b \in < E_0, E_1 >_{\rho,p}$ e $(a_n), (b_n)$ são sequências admissíveis para a e b respectivamente então $(\alpha a_n + b_n)$ é uma sequência admissível para $\alpha a + b$ e

$$\begin{aligned}
T(\alpha a + b) &= (\alpha a_n + b_n) + \mathcal{N} \\
&= \alpha((a_n) + \mathcal{N}) + ((b_n) + \mathcal{N}) \\
&= \alpha Ta + Tb.
\end{aligned}$$

Temos ainda que T é uma isometria, pois se (a_n) é uma sequência admissível para $a \in < E_0, E_1 >_{\rho,p}$ então

$$\begin{aligned}
\|Ta\|_* &= \|(a_n) + \mathcal{N}\|_* = \inf_{(b_n)\in(a_n)+\mathcal{N}} \|(b_n)\|_{\Lambda_{\rho,p}} \\
&= \inf_{(b_n)\in(a_n)+\mathcal{N}} \max_{k=0,1} \sup_F \|\sum_F \tilde{r}_n(\cdot)\frac{2^{kn}}{\rho(2^n)}b_n\|_{L^p([0,1],E_k)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \inf_{(a_n-b_n)\in\mathcal{N}} \max_{k=0,1} \sup_F \|\sum_F \tilde{r}_n(\cdot)\frac{2^{kn}}{\rho(2^n)} b_n\|_{L^p([0,1],E_k)} \\
&= \inf_{\sum a_n=\sum b_n} \max_{k=0,1} \sup_F \|\sum_F \tilde{r}_n(\cdot)\frac{2^{kn}}{\rho(2^n)} b_n\|_{L^p([0,1],E_k)} \\
&= \inf_{a=\sum b_n} \max_{k=0,1} \sup_F \|\sum_F \tilde{r}_n(\cdot)\frac{2^{kn}}{\rho(2^n)} b_n\|_{L^p([0,1],E_k)} \\
&= \|a\|_{<E_0,E_1>_{\rho,p}}.
\end{aligned}
$$

Fica então demonstrado que $\|\cdot\|_{<E_0,E_1>_{\rho,p}}$ é uma norma e que $< E_0, E_1 >_{\rho,p}$ é isomorfo e isométrico a $\Lambda_{\rho,p}/\mathcal{N}$ e consequentemente é um espaço de Banach.

Vamos demonstrar agora que $< E_0, E_1 >_{\rho,p}$ é um espaço intermediário, isto é,

2.2. TEOREMA: Seja (E_0, E_1) um par de Banach e $1 \leq p \leq \infty$. Então

$$
E_0 \cap E_1 \hookrightarrow < E_0, E_1 >_{\rho,p} \hookrightarrow E_0 + E_1. \tag{1}
$$

Demonstração. Seja $a \in E_0 \cap E_1$ e $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ definida por

$$
a_n = \begin{cases} a & \text{se } n = 0 \\ 0 & \text{se } n \neq 0. \end{cases}
$$

Desta forma $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ é uma sequência admissível para a e

$$
\begin{aligned}
\|a\|_{<E_0,E_1>_{\rho,p}} &\leq \max_{k=0,1} \sup_F \|\sum_F \tilde{r}_n(\cdot)\frac{2^{kn}}{\rho(2^n)} a_n\|_{L^p([0,1],E_k)} \\
&= \max_{k=0,1} \|a\|_{E_k} = \|a\|_{E_0\cap E_1}
\end{aligned}
$$

demonstrando assim a primeira inclusão de (1).

Para demonstrar a segunda inclusão tomemos $a \in < E_0, E_1 >_{\rho,p}$ e $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ uma sequência admissível arbitrária. Usando 1.6(1) e o Lema 1.7, segue como na observação 1.8 que

$$
\begin{aligned}
\|a\|_{E_0+E_1} &= \|\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\|_{E_0+E_1} \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} \|a_n\|_{E_0+E_1} \\
&\leq C \max_{k=0,1} \sup_F \|\sum_F \tilde{r}_n(\cdot)\frac{2^{kn}}{\rho(2^n)} a_n\|_{L^p([0,1],E_k)}
\end{aligned}
$$

Como $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ é arbitrária temos

$$||a||_{E_0+E_1} \leq C||a||_{<E_0,E_1>_{\rho,p}}$$

o que conclui a demonstração.

Um fato básico é que o método $< , >_{\rho,p}$ é um método de interpolação.

2.3. TEOREMA: Sejam (E_0, E_1), (F_0, F_1) dois pares de Banach e $1 \leq p \leq \infty$. Então se $T \in \mathcal{L}(E_k, F_k)$ (o espaço dos operadores lineares contínuos de E_k em F_k), $k = 0, 1$, temos que $T \in \mathcal{L}(< E_0, E_1 >_{\rho,p}, < F_0, F_1 >_{\rho,p})$ e

$$(1) \qquad ||T|| \leq 2M_0\overline{\rho}\left(\frac{M_1}{M_0}\right)$$

onde $M_k = ||T||_{\mathcal{L}(E_k,F_k)}$, $k = 0, 1$.

Demonstração. Seja $a \in < E_0, E_1 >_{\rho,p}$ e $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ uma sequência admissível arbitrária. Seja $m \in \mathbb{Z}$ tal que

$$(2) \qquad \frac{M_1}{M_0} \in [2^m, 2^{m+1}).$$

Consideremos $b_n = Ta_{n+m}$. Como

$$a = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{n+m} \qquad (\text{em } E_0 + E_1)$$

e $T : E_0 + E_1 \longrightarrow F_0 + F_1$ é contínuo segue que

$$(3) \qquad Ta = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \qquad (\text{em } F_0 + F_1)$$

Por outro lado, como $T \in \mathcal{L}(E_0, F_0)$ temos que

$$\begin{aligned}
||\sum_F \tilde{r}_n(\cdot)\frac{1}{\rho(2^n)}b_n||_{L^p([0,1],F_0)} &= ||\sum_F \tilde{r}_n(\cdot)\frac{1}{\rho(2^n)}Ta_{n+m}||_{L^p([0,1],F_0)} \\
&= ||T\left(\sum_F \tilde{r}_n(\cdot)\frac{1}{\rho(2^n)}a_{n+m}\right)||_{L^p([0,1],F_0)} \\
&\leq M_0||\sum_F \tilde{r}_n(\cdot)\frac{1}{\rho(2^n)}a_{n+m}||_{L^p([0,1],E_0)} \\
&= M_0||\sum_{F-m} \tilde{r}_{n-m}(\cdot)\frac{1}{\rho(2^{n-m})}a_n||_{L^p([0,1],E_0)}
\end{aligned}$$

Agora, como

$$\frac{1}{\rho(2^{n-m})} \leq \frac{\overline{\rho}(2^m)}{\rho(2^n)}$$

e levando em conta (2) e 1.3(1), temos

$$
\begin{aligned}
(4)\quad ||\sum_F \tilde{r}_n(\cdot)\frac{1}{\rho(2^n)}b_n||_{L^p([0,1],F_0)} &\leq M_0\overline{\rho}(2^m)||\sum_{F-m}\tilde{r}_{n-m}(\cdot)\frac{1}{\rho(2^n)}a_n||_{L^p([0,1],E_0)} \\
&= M_0\overline{\rho}(2^m)||\sum_{F-m}\tilde{r}_n(\cdot)\frac{1}{\rho(2^n)}a_n||_{L^p([0,1],E_0)} \\
&\leq M_0\overline{\rho}\left(\frac{M_1}{M_0}\right)||\sum_{F-m}\tilde{r}_n(\cdot)\frac{1}{\rho(2^n)}a_n||_{L^p([0,1],E_0)}.
\end{aligned}
$$

De modo análogo, como $\frac{M_1}{2^m} < 2M_0$, segue que

$$
\begin{aligned}
(5)\quad ||\sum_F \tilde{r}_n(\cdot)\frac{2^n}{\rho(2^n)}b_n||_{L^p([0,1],F_1)} &\leq M_1||\sum_{F-m}\tilde{r}_{n-m}(\cdot)\frac{2^{n-m}}{\rho(2^{n-m})}a_n||_{L^p([0,1],E_1)} \\
&\leq M_1\frac{\overline{\rho}(2^m)}{2^m}||\sum_{F-m}\tilde{r}_n(\cdot)\frac{2^n}{\rho(2^n)}a_n||_{L^p([0,1],E_0)} \\
&\leq \frac{M_1}{2^m}\overline{\rho}\left(\frac{M_1}{M_0}\right)||\sum_{F-m}\tilde{r}_n(\cdot)\frac{2^n}{\rho(2^n)}a_n||_{L^p([0,1],E_0)} \\
&\leq 2M_0\overline{\rho}\left(\frac{M_1}{M_0}\right)||\sum_{F-m}\tilde{r}_n(\cdot)\frac{2^n}{\rho(2^n)}a_n||_{L^p([0,1],E_0)}.
\end{aligned}
$$

Segue de (3), (4) e (5) que $(b_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ é uma sequência admissível para Ta e pela arbitrariedade de $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ temos também que

$$||Ta||_{<F_0,F_1>_{\rho,p}} \leq 2M_0\overline{\rho}\left(\frac{M_1}{M_0}\right)||a||_{<E_0,E_1>_{\rho,p}}$$

concluindo a demonstração do Teorema.

O próximo resultado é uma consequência imediata do seguinte resultado de J.P.Kahane.

2.4. LEMA: (Kahane [19]) Seja E um espaço de Banach e $1 < r < \infty$. Então para cada escolha de vetores $(a_i)_{i=1}^n$ em E temos

$$\int_0^1 ||\sum_{i=1}^n r_i(t)a_i||_E dt \sim (\int_0^1 ||\sum_{i=1}^n r_i(t)a_i||_E^r dt)^{1/r}$$

com constante de equivalência independente da escolha dos vetores em E.

2.5. PROPOSIÇÃO: Seja (E_0, E_1) um par de Banach e $1 \le p, q < \infty$. Então

$$(1) \qquad < E_0, E_1 >_{\rho,p} = < E_0, E_1 >_{\rho,q},$$

com equivalência de normas.

Demonstração. Segue imediatamente do Lema 2.4.

Temos o seguinte resultado de densidade, onde a condição de somabilidade 1.6(3) faz-se necessária pela primeira vez.

2.6. TEOREMA: Seja (E_0, E_1) um par de Banach e $1 \le p \le \infty$. Então $E_0 \cap E_1$ é denso em $< E_0, E_1 >_{\rho,p}$.

Demonstração. Seja $a \in < E_0, E_1 >_{\rho,p}$ e $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ uma sequência admissível para a. Considerando $A_j = \sum_{n=-j}^{j} a_n$ temos que $A_j \in E_0 \cap E_1$ e $a - A_j = \sum_{|n|>j} a_n$ em $E_0 + E_1$. Seja $F_j = \{n : |n| \le j\}$ e vamos definir para cada $j \in \mathbb{N}$ a sequência

$$b_n^j = \begin{cases} a_n & \text{se } n \notin F_j, \\ 0 & \text{se } n \in F_j. \end{cases}$$

Vamos verificar que $(b_n^j)_{n\in\mathbb{Z}}$ é uma sequência admissível para $a - A_j$. Claramente temos $a - A_j = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n^j$ com convergência em $E_0 + E_1$. Por outro lado, como $(\tilde{r}_n(\cdot)2^{kn}a_n/\rho(2^n))_{n\in\mathbb{Z}}$ é somável em $L^p([0,1], E_k)$, segue que dado $\varepsilon > 0$ existe $F_\varepsilon \subset \mathbb{Z}$ finito tal que se $F' \cap F_\varepsilon = \emptyset$ com $F' \subset \mathbb{Z}$ finito temos

$$(1) \qquad \|\sum_{F'} \tilde{r}_n(\cdot)\frac{2^{kn}}{\rho(2^n)}a_n\|_{L^p([0,1],E_k)} < \varepsilon.$$

Seja agora $F_\varepsilon^j = F_\varepsilon \cup F_j$ e tomemos $F' \subset \mathbb{Z}$ finito tal que $F' \cap F_\varepsilon^j = \emptyset$. Para tais F' temos que $F' \cap F_\varepsilon = \emptyset$, $F' \cap F_j = \emptyset$ e então

$$\|\sum_{F'} \tilde{r}_n(\cdot)\frac{2^{kn}}{\rho(2^n)}b_n^j\|_{L^p([0,1],E_k)} = \|\sum_{F'} \tilde{r}_n(\cdot)\frac{2^{kn}}{\rho(2^n)}a_n\|_{L^p([0,1],E_k)} < \varepsilon.$$

Logo, para cada $j \in \mathbb{N}$, temos que $(\tilde{r}_n(\cdot)2^{kn}b_n^j/\rho(2^n))_{n\in\mathbb{Z}}$ é $L^p([0,1], E_k)$-somável e

$$\begin{aligned} \sup_F \|\sum_F \tilde{r}_n(\cdot)\frac{2^{kn}}{\rho(2^n)}b_n^j\|_{L^p([0,1],E_k)} &= \sup_{F\cap F_j=\emptyset} \|\sum_F \tilde{r}_n(\cdot)\frac{2^{kn}}{\rho(2^n)}b_n^j\|_{L^p([0,1],E_k)} \\ &\le \sup_F \|\sum_F \tilde{r}_n(\cdot)\frac{2^{kn}}{\rho(2^n)}a_n\|_{L^p([0,1],E_k)} < \infty. \end{aligned}$$

Assim, $(b_n^j)_{n\in\mathbb{Z}}$ é uma sequência admissível para $a - A_j$. Além disso, para cada $j > j_0 = \max\{|n| : n \in F_\varepsilon\}$, usando (1) e notando que $F \cap F_j = \emptyset$ implica $F \cap F_\varepsilon = \emptyset$, temos que

$$||a - A_j||_{<E_0,E_1>_{\rho,p}} \leq \max_{k=0,1} \sup_{F\cap F_j=\emptyset} ||\sum_F \bar{r}_n(\cdot)\frac{2^{kn}}{\rho(2^n)}a_n||_{L^p([0,1],E_k)} < \varepsilon$$

o que mostra que $A_j \to a$ em $< E_0, E_1 >_{\rho,p}$, ou seja $E_0 \cap E_1$ é denso em $< E_0, E_1 >_{\rho,p}$.

CAPÍTULO IV

INTERPOLAÇÃO DE ESPAÇOS $L^p_{(w)}(E)$

Um problema proposto por Peetre é o de determinar todos os métodos de interpolação $\mathcal{F}$, que comutam com os espaços L^p, ou seja, quais os métodos de interpolação tais que $\mathcal{F}(L^p(E_0), L^p(E_1)) = L^p(\mathcal{F}(E_0, E_1))$, onde (E_0, E_1) é um par de Banach. O nosso primeiro resultado deste capítulo é demonstrar que o método que introduzimos neste trabalho comuta com L_p, mas com a restrição de que o par de Banach (E_0, E_1) seja constituído por reticulados de Banach com uma certa propriedade geométrica. Desta forma, iniciaremos este capítulo com uma seção relembrando a noção de q-concavidade e cotipo de um reticulado de Banach. Nessa seção demonstraremos uma versão vetorial de uma desigualdade tipo Carlson e enunciaremos a versão vetorial da desigualdade de Khintchine.

Ainda neste capítulo demonstraremos outros teoremas de interpolação para os espaços $L^p_{(w)}(E)$, onde variamos w, p e E no mesmo resultado. Para essa situação, precisaremos restringir o parâmetro funcional ρ para o caso $\rho(t) = t^\theta$. Apresentaremos ainda alguns casos limites dos resultados obtidos.

1. RETICULADOS DE BANACH

A seguir, relembraremos a noção de reticulados de Banach e de certas propriedades geométricas de tais espaços.

1.1. DEFINIÇÃO: Um espaço de Banach E sobre $I\!R$, parcialmente ordenado é chamado um **reticulado de Banach** se

(i) $x \le y$ implica $x + z \le y + z$, para cada $x, y, z \in E$,
(ii) $ax \ge 0$ para cada $x \ge 0$ em E e cada $a \ge 0$ em $I\!R$,
(iii) dados $x, y \in E$ existe $x \vee y = \sup\{x, y\}$ e $x \wedge y = \inf\{x, y\}$,
(iv) $||x||_E \le ||y||_E$ sempre que $|x| \le |y|$, onde o valor absoluto $|x|$ de $x \in E$ é definido por $|x| = x \vee (-x)$.

1.2. O próximo resultado que estabeleceremos é uma versão vetorial de uma desigualdade do tipo Carlson, onde aparece uma expressão do tipo $(\sum_{i=1}^n |a_i|^p)^{1/p}$, $1 \le p \le \infty$, com $(a_i)_{i=1}^n$ em um reticulado de Banach E e a modificação usual para $p = \infty$. Segundo

Lindenstrauss-Tzafriri [19], definiremos

$$(1) \qquad (\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p)^{1/p} = \sup\{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i : \alpha_i \in I\!R \text{ e } \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^{p'} \leq 1\}$$

onde $1/p + 1/p' = 1$. Segue imediatamente de (1) a seguinte desigualdade de Hölder,

$$(2) \qquad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i \leq (\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^{p'})^{1/p'} (\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p)^{1/p}$$

onde $\alpha_i \in I\!R$ e $a_i \in E$, $i = 1, \cdots, n$. Além disso, se $n \leq m$ então

$$(3) \qquad (\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p)^{1/p} \leq (\sum_{i=1}^{m} |a_i|^p)^{1/p}.$$

1.3. PROPOSIÇÃO: (Carlson) Seja $(a_i)_{i=1}^n$ uma sequência de elementos de um reticulado de Banach E. Então para $\rho \in \mathcal{P}^{+-}$ e $1 \leq p \leq \infty$ temos

$$(1) \qquad \|\sum_{i=1}^{n} a_i\|_E \leq CR\left(\|(\sum_{i=1}^{n}(|a_i|/\rho(2^i))^p)^{1/p}\|_E, \|(\sum_{i=1}^{n}(2^i|a_i|/\rho(2^i))^p)^{1/p}\|_E\right),$$

onde $R(s,t) = s\rho(t/s)$.

Demonstração. Seja $A_k = \|(\sum_{i=1}^{n}(2^{ki}|a_i|/\rho(2^i))^p)^{1/p}\|_E$, $k = 0, 1$ e $s \in I\!R_+$ qualquer. Vamos demonstrar inicialmente (1) para $p = 1$. Temos que

$$\begin{aligned}
\|\sum_{i=1}^{n} a_i\|_E &= \|\sum_{2^i \leq s} a_i + \sum_{2^i > s} a_i\|_E \\
&\leq \|\sum_{2^i \leq s} \rho(2^i) a_i/\rho(2^i)\|_E + \|\sum_{2^i > s} \frac{\rho(2^i)}{2^i} 2^i a_i/\rho(2^i)\|_E
\end{aligned}$$

e como por III.1.1(1) $\overline{\rho}(t) \leq C\max(1,t)$, temos que

$$\begin{aligned}
\|\sum_{i=1}^{n} a_i\|_E &\leq C\rho(s)\|\sum_{2^i \leq s} |a_i|/\rho(2^i)\|_E + C\frac{\rho(s)}{s}\|\sum_{2^i > s} 2^i|a_i|/\rho(2^i)\|_E \\
&\leq \left(A_0 + \frac{A_1}{s}\right)\rho(s).
\end{aligned}$$

Tomando agora $s = A_1/A_0$, segue que

$$\|\sum_{i=1}^{n} a_i\|_E \leq CA_0\rho(A_1/A_0) = CR(A_0, A_1)$$

o que prova (1) para $p = 1$. Suponhamos agora $1 < p \leq \infty$. Segue de 1.2(2) que

$$(2) \qquad \|\sum_{i=1}^{n} a_i\|_E \leq (\sum_{i=1}^{n} \rho(2^i)^{p'})^{1/p'} A_0 + (\sum_{i=1}^{n} (\rho(2^i)/2^i)^{p'})^{1/p'} A_1.$$

Mas como $\rho \in \mathcal{P}^{+-}$ segue que (ver [12])

$$\left(\int_0^\infty (\min(1, \frac{s}{t}) \rho(t))^{p'} \frac{dt}{t} \right)^{1/p'} \leq C\rho(s)$$

e então

$$\begin{aligned}
(C\rho(s))^{p'} &\geq \sum_{i=-\infty}^{\infty} \int_{2^i}^{2^{i+1}} (\min(1, \frac{s}{t}) \rho(t))^{p'} \frac{dt}{t} \\
&\geq C \sum_{i=-\infty}^{\infty} \int_{2^i}^{2^{i+1}} (\min(1, \frac{s}{t}) \rho(2^i))^{p'} \frac{dt}{t} \\
&= C \sum_{2^i \leq s} \int_{2^i}^{2^{i+1}} (\min(1, \frac{s}{t}) \rho(2^i))^{p'} \frac{dt}{t} + \sum_{2^i > s} \int_{2^i}^{2^{i+1}} (\min(1, \frac{s}{t}) \rho(2^i))^{p'} \frac{dt}{t} \\
&\geq C \sum_{2^i \leq s} \int_{2^i}^{2^{i+1}} (\frac{\rho(2^i)}{2})^{p'} \frac{dt}{t} + \sum_{2^i > s} \int_{2^i}^{2^{i+1}} (\frac{s}{2} \frac{\rho(2^i)}{2^i})^{p'} \frac{dt}{t} \\
&= C \frac{\log 2}{2^{p'}} \sum_{2^i \leq s} \rho(2^i)^{p'} + s^{p'} \frac{\log 2}{2^{p'}} \sum_{2^i > s} (\frac{\rho(2^i)}{2^i})^{p'}.
\end{aligned}$$

Assim

$$(3) \qquad C\rho(s) \geq (\sum_{2^i \leq s} \rho(2^i)^{p'})^{1/p'}$$

e

$$(4) \qquad C \frac{\rho(s)}{s} \geq (\sum_{2^i > s} (\frac{\rho(2^i)}{2^i})^{p'})^{1/p'}.$$

Substituindo (3) e (4) em (2) com $s = A_1/A_0$ obtemos (1).

1.4. DEFINIÇÃO: Diremos que um reticulado de Banach E tem **concavidade finita**(ou é **q-concavo)** se existe q com $1 \leq q < \infty$ e uma constante $C > 0$ tal que para qualquer sequência $(a_i)_{i=1}^n$ em E temos

$$(1) \qquad (\sum_{i=1}^{n} \|a_i\|_E^q)^{1/q} \leq C \|(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^q)^{1/q}\|_E.$$

Para reticulados de Banach com concavidade finita vale uma desigualdade que nos será de grande utilidade no restante do nosso trabalho.

1.5. TEOREMA: (Khintchine-Maurey, [19]) Seja E um reticulado de Banach com concavidade finita. Então para qualquer sequência $(a_i)_{i=1}^n$ em E temos

$$(1) \qquad \|(\sum_{i=1}^n |a_i|^2)^{1/2}\|_E \sim \|\sum_{i=1}^n r_i(\cdot)a_i\|_{L^p([0,1],E)}$$

com constante de equivalência independente da escolha da sequência em E e $1 \leq p < \infty$.

1.6. DEFINIÇÃO: Um reticulado de Banach E tem **cotipo finito (cotipo q)**, se existe q, $2 \leq q < \infty$ e uma constante $C > 0$ tal que para qualquer sequência $(a_i)_{i=1}^n$ em E temos

$$(1) \qquad \int_0^1 \|\sum_{i=1}^n r_i(t)a_i\|_E dt \geq C^{-1}(\sum_{i=1}^n \|a_i\|_E^q)^{1/q}.$$

1.7. OBSERVAÇÕES: 1.) Os espaços L^p são de cotipo $\max(2,p)$. Então, segue de [19, pg 88] que L^p é q-concavo para cada $q > \max(2,p)$.
2.) Um reticulado de Banach que é q-concavo para algum $q \geq 2$ é de cotipo q. Além disso se E é de cotipo r com $1 < r < \infty$ então E é q-concavo para cada $q > r$. (ver [19])

1.8. PROPOSIÇÃO: Se E é um reticulado de Banach de cotipo finito, então $L^p(E)$ tem concavidade finita.

Demonstração. Suponhamos que E tem cotipo q. Seja $r > \max(p,q)$. Então L^p e E são r-concavos. Se $(f_i)_{i=1}^n$ é uma sequência qualquer em $L^p(E)$ então

$$\begin{aligned}
(\sum_{i=1}^n \|f_i\|_{L^p(E)}^r)^{1/r} &= (\sum_{i=1}^n \|\|f_i(\cdot)\|_E\|_{L^p}^r)^{1/r} \\
&\leq C_1\|(\sum_{i=1}^n \|f_i(\cdot)\|_E^r)^{1/r}\|_{L^p} \\
&\leq C_1\|C_2\|(\sum_{i=1}^n |f_i(\cdot)|^r)^{1/r}\|_E\|_{L^p} \\
&= C\|(\sum_{i=1}^n |f_i|^r)^{1/r}\|_{L^p(E)}
\end{aligned}$$

o que mostra que $L^p(E)$ é r-concavo.

2. INTERPOLAÇÃO DE ESPAÇOS $L^p_{(w)}(E)$

O nosso primeiro resultado neste sentido é uma comutação de $L^p_{(w)}$ com o método de interpolação $< \, , \, >_{\rho,p}$.

2.1. TEOREMA: Sejam (E_0, E_1) um par de Banach formado de reticulados de Banach com concavidade finita, $1 \leq p \leq \infty$ e w um peso. Então

$$(1) \qquad < L^p_{(w)}(E_0), L^p_{(w)}(E_1) >_{\rho,p} = L^p_{(w)}(< E_0, E_1 >_{\rho,p})$$

com equivalência de normas.

Demonstração. Seja $a \in L^p_{(w)}(< E_0, E_1 >_{\rho,p})$ uma função tal que aw é simples a valores em $< E_0, E_1 >_{\rho,p}$, isto é,

$$aw = \sum_{j=1}^{N} a_j \chi_{B_j}$$

onde $a_j \in < E_0, E_1 >_{\rho,p}$. Para cada $j = 1, \cdots, N$ seja $(a_n^j)_{n \in \mathbb{Z}}$ uma sequência admissível para a_j tal que

$$(2) \qquad \max_{k=0,1} \sup_F \| \sum_F \tilde{r}_n(\cdot) \frac{2^{kn}}{\rho(2^n)} a_n^j \|_{L^p([0,1],E_k)} \leq 2 \| a_j \|_{< E_0, E_1 >_{\rho,p}}.$$

Para cada $n \in \mathbb{Z}$ seja a_n definida por

$$a_n(x)w(x) = \begin{cases} a_n^j & \text{se } x \in B_j \, , \; j = 1, \cdots N, \\ 0 & \text{se } x \notin \cup B_j. \end{cases}$$

Seja $F \subset \mathbb{Z}$ um conjunto finito qualquer. Segue de (2) e do Teorema de Fubini que

$$\begin{aligned} \int_0^1 \| \sum_F \tilde{r}_n(t) \frac{2^{kn}}{\rho(2^n)} a_n \|^p_{L^p_{(w)}(E_k)} dt &= \int_0^1 \int_\Omega \left\| \left(\sum_F \tilde{r}_n(t) \frac{2^{kn}}{\rho(2^n)} a_n(x) \right) w(x) \right\|^p_{E_k} d\mu dt \\ &= \sum_{j=1}^{N} \int_{B_j} \int_0^1 \| \sum_F \tilde{r}_n(t) \frac{2^{kn}}{\rho(2^n)} a_n^j \|^p_{E_k} dt d\mu \\ &\leq 2^p \sum_{j=1}^{N} \int_{B_j} \| a_j \|^p_{< E_0, E_1 >_{\rho,p}} d\mu \\ &= 2^p \int_\Omega \| a(x) w(x) \|^p_{< E_0, E_1 >_{\rho,p}} d\mu \end{aligned}$$

e então

$$(3)\qquad \|\sum_{F}\tilde{r}_n(\cdot)\frac{2^{kn}}{\rho(2^n)}a_n\|_{L^p([0,1],L^p_{(w)}(E_k))}\leq 2\|a\|_{L^p_{(w)}(<E_0,E_1>_{\rho,p})}.$$

Logo, (3) nos mostra que $a_n\in L^p_{(w)}(E_0)\cap L^p_{(w)}(E_1)$ e

$$(4)\qquad \max_{k=0,1}\sup_{F}\|\sum_{F}\tilde{r}_n(\cdot)\frac{2^{kn}}{\rho(2^n)}a_n\|_{L^p([0,1],L^p_{(w)}(E_k))}\leq 2\|a\|_{L^p_{(w)}(<E_0,E_1>_{\rho,p})}.$$

Vamos verificar agora que $(\tilde{r}_n(\cdot)2^{kn}a_n/\rho(2^n))_{n\in\mathbb{Z}}$ é $L^p([0,1],L^p_{(w)}(E_k))$-somável. Temos que dado $\varepsilon>0$, existem $F^j_\varepsilon\subset\mathbb{Z}$ finitos, $j=1,\cdots,N$ tais que se $F'\cap F^j_\varepsilon=\emptyset$ com $F'\subset\mathbb{Z}$ finito então

$$(5)\qquad \|\sum_{F'}\tilde{r}_n(\cdot)\frac{2^{kn}}{\rho(2^n)}a^j_n\|_{L^p([0,1],E_k)}\leq\left(\frac{\varepsilon}{\sum_{j=1}^N\mu(B_j)}\right)^{1/p}.$$

Consideremos então $F_\varepsilon=\cup_{j=1}^N F^j_\varepsilon$ e $F'\subset\mathbb{Z}$ finito com $F'\cap F_\varepsilon=\emptyset$. Assim $F'\cap F^j_\varepsilon=\emptyset$ para cada $j=1,\cdots,N$ e usando o Teorema de Fubini e (5) temos

$$\begin{aligned}
\int_0^1\|\sum_{F'}\tilde{r}_n(t)\frac{2^{kn}}{\rho(2^n)}a_n\|^p_{L^p_{(w)}(E_k)}dt &= \int_0^1\int_\Omega\left\|\left(\sum_{F'}\tilde{r}_n(t)\frac{2^{kn}}{\rho(2^n)}a_n(x)\right)w(x)\right\|^p_{E_k}d\mu dt\\
&= \sum_{j=1}^N\int_{B_j}\int_0^1\|\sum_{F'}\tilde{r}_n(t)\frac{2^{kn}}{\rho(2^n)}a^j_n\|^p_{E_k}dtd\mu\\
&\leq \sum_{j=1}^N\int_{B_j}\frac{\varepsilon}{\sum_{j=1}^N\mu(B_j)}d\mu=\varepsilon
\end{aligned}$$

o que prova a somabilidade desejada.

Sejam agora $F_0\subset\mathbb{Z}_-$ e $F_1\subset\mathbb{Z}_+$ subconjuntos finitos quaisquer. Segue de (2) que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega\|\sum_{F_k}a_n(x)w(x)\|^p_{E_k}d\mu &= \sum_{j=1}^N\int_{B_j}\|\sum_{F_k}a^j_n\|^p_{E_k}d\mu\\
&\leq \sum_{j=1}^N\int_{B_j}\left(\sum_{F_k}\frac{\rho(2^n)}{2^{kn}}\|\frac{2^{kn}}{\rho(2^n)}a^j_n\|_{E_k}\right)^p d\mu\\
&\leq \sum_{j=1}^N\int_{B_j}\left(2\sum_{F_k}\frac{\rho(2^n)}{2^{kn}}\|a_j\|_{<E_0,E_1>_{\rho,p}}\right)^p d\mu\\
&= \left(2\sum_{F_k}\frac{\rho(2^n)}{2^{kn}}\right)^p\int_\Omega\|a(x)w(x)\|^p_{<E_0,E_1>_{\rho,p}}d\mu
\end{aligned}$$

e então

$$||\sum_{F_k} a_n||_{L^p_{(w)}(E_k)} \leq 2\sum_{F_k} \frac{\rho(2^n)}{2^{kn}} ||a||_{L^p_{(w)}(<E_0,E_1>_{\rho,p})}.$$

Assim $(a_n)_{n<0}$ é $L^p_{(w)}(E_0)$-somável e $(a_n)_{n\geq 0}$ é $L^p_{(w)}(E_1)$-somável. Sejam $b_0 = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n$ e $b_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ em $L^p_{(w)}(E_0)$ e $L^p_{(w)}(E_1)$ respectivamente. Consideremos ainda $w_i^j = \sum_{n=-i}^{i} a_n^j$, $u_i = \sum_{n=-i}^{-1} a_n$ e $v_i = \sum_{n=0}^{i} a_n$. Como $a_j = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^j$ em $E_0 + E_1$ temos que $w_i^j \to a_j$ em $E_0 + E_1$. Além disso, $u_i \to b_0$ em $L^p_{(w)}(E_0)$ e $v_i \to b_1$ em $L^p_{(w)}(E_1)$. Logo existe subsequência (u_{i_k}) tal que $u_{i_k}(x)w(x) \to b_0(x)w(x)$ em E_0 μ-a.e. Por outro lado $v_{i_k} \to b_1$ em $L^p_{(w)}(E_1)$ e então existe $(v_{i_{k_r}})$ tal que $v_{i_{k_r}}(x)w(x) \to b_1(x)w(x)$ em E_1 μ-a.e. Temos também que

$$(u_{i_{k_r}}(x) + v_{i_{k_r}}(x))w(x) \to (b_0(x) + b_1(x))w(x)$$

em $E_0 + E_1$ μ-a.e. Além disso

$$\begin{aligned}(u_{i_{k_r}}(x) + v_{i_{k_r}}(x))w(x) &= (\sum_{n=-i_{k_r}}^{-1} a_n(x) + \sum_{n=0}^{i_{k_r}} a_n(x))w(x) \\ &= \sum_{n=-i_{k_r}}^{i_{k_r}} a_n^j = w_{i_{k_r}}^j \to a_j = a(x)w(x)\end{aligned}$$

em $E_0 + E_1$. Logo $a(x) = b_0(x) + b_1(x)$ μ-a.e., e

$$||a - \sum_{n=N_1}^{N_2} a_n||_{L^p_{(w)}(E_0)+L^p_{(w)}(E_1)} \leq ||b_0 - \sum_{N_1\leq n<0} a_n||_{L^p_{(w)}(E_0)} + ||b_1 - \sum_{0\leq n\leq N_2} a_n||_{L^p_{(w)}(E_1)}$$

demonstrando que $a = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n$ com convergência em $L^p_{(w)}(E_0) + L^p_{(w)}(E_1)$. Assim $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ é uma sequência admissível para a e segue de (4) que

$$(6) \qquad ||a||_{<L^p_{(w)}(E_0),L^p_{(w)}(E_1)>_{\rho,p}} \leq 2||a||_{L^p_{(w)}(<E_0,E_1>_{\rho,p})}$$

Agora, se a é um elemento qualquer de $L^p_{(w)}(< E_0, E_1 >_{\rho,p})$, segue de I.2.2 que existe uma sequência $(a_n)_{n\geq 0}$ em $L^p_{(w)}(< E_0, E_1 >_{\rho,p})$ tal que $a_n w$ é simples, $a_n \to a$ em $L^p_{(w)}(< E_0, E_1 >_{\rho,p})$ e por (6)

$$(7) \qquad ||a_n||_{<L^p_{(w)}(E_0),L^p_{(w)}(E_1)>_{\rho,p}} \leq 2||a_n||_{L^p_{(w)}(<E_0,E_1>_{\rho,p})}$$

Usando o Teorema III.2.2(1) vemos também que

(8) $$< L^p_{(w)}(E_0), L^p_{(w)}(E_1) >_{\rho,p} \hookrightarrow L^p_{(w)}(E_0) + L^p_{(w)}(E_1)$$

e

(9) $$L^p_{(w)}(< E_0, E_1 >_{\rho,p}) \hookrightarrow L^p_{(w)}(E_0 + E_1).$$

Mas, segue de [6] que $L^p_{(w)}(E_0 + E_1) = L^p_{(w)}(E_0) + L^p_{(w)}(E_1)$ e então

(10) $$L^p_{(w)}(< E_0, E_1 >_{\rho,p}) \hookrightarrow L^p_{(w)}(E_0) + L^p_{(w)}(E_1)$$

Segue de (8) e (10) com passagem ao limite em (7) que

(11) $$||a||_{< L^p_{(w)}(E_0), L^p_{(w)}(E_1) >_{\rho,p}} \leq 2||a||_{L^p_{(w)}(< E_0, E_1 >_{\rho,p})}$$

o que mostra que

$$L^p_{(w)}(< E_0, E_1 >_{\rho,p}) \hookrightarrow < L^p_{(w)}(E_0), L^p_{(w)}(E_1) >_{\rho,p} .$$

Consideremos agora $a \in < L^p_{(w)}(E_0), L^p_{(w)}(E_1) >_{\rho,p}$ e $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ uma sequência admissível para a tal que

(12) $$\max_{k=0,1} \sup_F || \sum_F \tilde{r}_n(\cdot) \frac{2^{kn}}{\rho(2^n)} a_n ||_{L^p([0,1], L^p_{(w)}(E_k))} \leq 2||a||_{< L^p_{(w)}(E_0), L^p_{(w)}(E_1) >_{\rho,p}}$$

Fixemos F por um momento e vamos considerar

$$b_n(x) = \begin{cases} a_n(x) & \text{se } n \in F, \\ 0 & \text{se } n \notin F. \end{cases}$$

Então $(b_n(x))_{n\in\mathbb{Z}}$ é uma sequência admissível para $\sum_F a_n(x)$. De fato, inicialmente vemos que

$$\sum_F a_n(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n(x) \quad \text{(convergência em } E_0 + E_1).$$

Por outro lado como $(\tilde{r}_n(\cdot) 2^{kn} b_n(x)/\rho(2^n))_{n\in\mathbb{Z}} = (\tilde{r}_n(\cdot) 2^{kn} a_n(x)/\rho(2^n))_{n\in F}$, segue a $L^p([0,1], E_k)$-somabilidade de $(\tilde{r}_n(\cdot) 2^{kn} b_n(x)/\rho(2^n))_{n\in\mathbb{Z}}$. Finalmente usando a desigualdade de Khintchine-Maurey temos

$$\begin{aligned} \sup_G || \sum_G \tilde{r}_n(\cdot) \frac{2^{kn}}{\rho(2^n)} b_n(x) ||_{L^p([0,1], E_k)} &= \sup_{G\subset F} || \sum_G \tilde{r}_n(\cdot) \frac{2^{kn}}{\rho(2^n)} a_n(x) ||_{L^p([0,1], E_k)} \\ &\leq C \sup_{G\subset F} || (\sum_G (\frac{2^{kn}}{\rho(2^n)} a_n(x))^2)^{1/2} ||_{E_k} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq C||(\sum_F(\frac{2^{kn}}{\rho(2^n)}a_n(x))^2)^{1/2}||_{E_k} \\
&\leq C||\sum_F \tilde{r}_n(\cdot)\frac{2^{kn}}{\rho(2^n)}a_n(x)||_{L^p([0,1],E_k)}.
\end{aligned}
$$

Assim, temos que

$$
\begin{aligned}
||\sum_F a_n(x)||_{<E_0,E_1>_{\rho,p}} &\leq \max_{k=0,1}\sup_G ||\sum_G \tilde{r}_n(\cdot)\frac{2^{kn}}{\rho(2^n)}b_n(x)||_{L^p([0,1],E_k)} \\
&\leq C\max_{k=0,1}||\sum_F \tilde{r}_n(\cdot)\frac{2^{kn}}{\rho(2^n)}a_n(x)||_{L^p([0,1],E_k)}
\end{aligned}
$$

e usando (12) e o Teorema de Fubini

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega ||\sum_F a_n(x)w(x)||^p_{<E_0,E_1>_{\rho,p}}d\mu &\leq C^p\max_{k=0,1}\int_\Omega ||\sum_F \tilde{r}_n(\cdot)\frac{2^{kn}}{\rho(2^n)}a_n(x)w(x)||^p_{L^p([0,1],E_k)}d\mu \\
&= C^p\max_{k=0,1}\int_0^1\int_\Omega ||\sum_F \tilde{r}_n(t)\frac{2^{kn}}{\rho(2^n)}a_n(x)w(x)||^p_{E_k}d\mu dt \\
&= C^p\max_{k=0,1}||\sum_F \tilde{r}_n(\cdot)\frac{2^{kn}}{\rho(2^n)}a_n||^p_{L^p([0,1],L^p_{(w)}(E_k))} \\
&\leq C^p||a||^p_{<L^p_{(w)}(E_0),L^p_{(w)}(E_1)>_{\rho,p}}.
\end{aligned}
$$

Então

$$
(13) \qquad ||\sum_F a_n||_{L^p_{(w)}(<E_0,E_1>_{\rho,p})} \leq C||a||_{<L^p_{(w)}(E_0),L^p_{(w)}(E_1)>_{\rho,p}}.
$$

Nos cálculos acima vimos também que

$$
(14) \qquad ||\sum_F a_n||_{L^p_{(w)}(<E_0,E_1>_{\rho,p})} \leq C\max_{k=0,1}||\sum_F \tilde{r}_n(\cdot)\frac{2^{kn}}{\rho(2^n)}a_n||_{L^p([0,1],L^p_{(w)}(E_k))}.
$$

Como $(\tilde{r}_n(\cdot)2^{kn}a_n/\rho(2^n))_{n\in\mathbb{Z}}$ é $L^p([0,1],L^p_{(w)}(E_k))$-somável segue de (14) que $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ é somável em $L^p_{(w)}(<E_0,E_1>_{\rho,p})$. Assim segue da primeira inclusão e do Teorema III.2.2(1) que $a=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n$ em $L^p_{(w)}(<E_0,E_1>_{\rho,p})$. Finalmente tomando limite em (13) temos

$$
||a||_{L^p_{(w)}(<E_0,E_1>_{\rho,p})} \leq C||a||_{<L^p_{(w)}(E_0),L^p_{(w)}(E_1)>_{\rho,p}}.
$$

Fica então terminada a demonstração do Teorema.

No restante do nosso trabalho vamos supor, sem perda de generalidade, que a constante de "quase-concavidade" do parâmetro funcional ρ vale 1.

O seguinte teorema generaliza um teorema devido a Gustavsson [11].

2.2. TEOREMA: Sejam E um reticulado de Banach com concavidade finita, w_0, w_1 dois pesos e $1 \leq p \leq \infty$. Se

$$w = w_0/\rho(w_0/w_1) \tag{1}$$

então

$$< L^p_{(w_0)}(E), L^p_{(w_1)}(E) >_{\rho,p} = L^p_{(w)}(E). \tag{2}$$

com equivalência de normas.

Demonstração. Seja $a \in L^p_{(w)}(E)$ e consideremos

$$B_n = \{x \in \Omega : \frac{w_0(x)}{w_1(x)} \in [2^{n-1}, 2^n)\}.$$

Então $\Omega = \cup_{n \in \mathbb{Z}} B_n$ e $B_n \cap B_m = \emptyset$ se $n \neq m$. Vamos definir a seguinte sequência

$$a_n(x) = \begin{cases} \lambda_n a(x) & \text{se } x \in B_n, \\ 0 & \text{se } x \notin B_n \end{cases}$$

onde $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ é uma sequência de números reais positivos com $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda_n = 1$. Verifiquemos que $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ é uma sequência admissível para a. Temos que em B_n vale

$$\frac{2^{k(n-1)}}{\rho(2^{n-k})} \leq \frac{(w_0(x))^k}{(w_1(x))^k \rho(w_0(x)/w_1(x))} = \frac{w(x)}{w_k(x)} \qquad (k = 0, 1). \tag{3}$$

Seja $F \subset \mathbb{Z}$ um suconjunto finito qualquer. Então, para $k = 0, 1$, usando (3) temos

$$\begin{aligned} \int_\Omega \| \left(\sum_F \tilde{r}_n(t) \frac{2^{kn}}{\rho(2^n)} a_n(x) \right) w_k(x) \|_E^p d\mu &= \sum_{n \in F} \int_{B_n} \| \left(\lambda_n \frac{2^{kn}}{\rho(2^n)} a(x) \right) w_k(x) \|_E^p d\mu \\ &\leq 2^{kp} \sum_{n \in F} \lambda_n^p \int_{B_n} \| \left(\frac{2^{k(n-1)}}{\rho(2^{n-k})} a(x) \right) w_k(x) \|_E^p d\mu \\ &\leq (2^k \sum_{n \in F} \lambda_n)^p \int_\Omega \|a(x) w(x)\|_E^p d\mu \end{aligned}$$

o que mostra que

$$(4) \qquad \|\sum_F \tilde{r}_n(\cdot)\frac{2^{kn}}{\rho(2^n)}a_n\|_{L^p([0,1],L^p_{(w_k)}(E))} \leq 2^k \sum_{n\in F} \lambda_n \|a\|_{L^p_{(w)}(E)}.$$

De (4) podemos concluir que $a_n \in L^p_{(w_0)}(E) \cap L^p_{(w_1)}(E)$, $(\tilde{r}_n(\cdot)2^{kn}a_n/\rho(2^n))_{n\in\mathbb{Z}}$ é $L^p([0,1],L^p_{(w_k)}(E))$-somável e

$$(5) \qquad \max_{k=0,1}\sup_F \|\sum_F \tilde{r}_n(\cdot)\frac{2^{kn}}{\rho(2^n)}a_n\|_{L^p([0,1],L^p_{(w_k)}(E))} \leq 2\|a\|_{L^p_{(w)}(E)}.$$

Consideremos agora $F_0 \subset \mathbb{Z}_-$ e $F_1 \subset \mathbb{Z}_+$ dois subconjuntos finitos quaisquer. Então, usando (3) temos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \|\sum_{F_k} a_n(x)w_k(x)\|_E^p d\mu &= \sum_{n\in F_k}\int_{B_n}\|\lambda_n a(x)w_k(x)\|_E^p d\mu \\
&\leq \sum_{n\in F_k}\lambda_n^p\int_{B_n}\|\frac{2^{k(n-1)}}{\rho(2^{n-k})}a(x)w_k(x)\|_E^p d\mu \\
&\leq (\sum_{n\in F_k}\lambda_n)^p\int_\Omega \|a(x)w(x)\|_E^p d\mu
\end{aligned}$$

ou seja,

$$(6) \qquad \|\sum_{F_k} a_n\|_{L^p_{(w_k)}(E)} \leq \sum_{n\in F_k}\lambda_n\|a\|_{L_{(w)}(E)}.$$

De (6) concluímos que $(a_n)_{n<0}$ é $L^p_{(w_0)}(E)$- somável e $(a_n)_{n\geq 0}$ é $L^p_{(w_1)}(E)$-somável. Considerando $b_0 = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n$ e $b_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ em $L^p_{(w_0)}(E)$ e $L^p_{(w_1)}(E)$ respectivamente, segue que $a = b_0 + b_1$ e

$$\|a - \sum_{n=N_1}^{N_2} a_n\|_{L^p_{(w_0)}(E)+L^p_{(w_1)}(E)} \leq \|b_0 - \sum_{N_1\leq n<0} a_n\|_{L^p_{(w_0)}(E)} + \|b_1 - \sum_{0\leq n\leq N_2} a_n\|_{L^p_{(w_1)}(E)}$$

demonstrando que $a = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n$ com convergência em $L^p_{(w_0)}(E) + L^p_{(w_1)}(E)$, e então $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ é uma sequência admissível para a. Segue de (5) que

$$\|a\|_{<L^p_{(w_0)}(E),L^p_{(w_1)}(E)>_{\rho,p}} \leq 2\|a\|_{L^p_{(w)}(E)}$$

demonstrando a inclusão

$$L^p_{(w)}(E) \hookrightarrow < L^p_{(w_0)}(E), L^p_{(w_1)}(E) >_{\rho,p} .$$

Consideremos agora $a \in < L^p_{(w_0)}(E), L^p_{(w_1)}(E) >_{\rho,p}$ e $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ uma sequência admissível para a tal que

$$\max_{k=0,1} \sup_{F} \|\sum_F \tilde{r}_n(\cdot)\frac{2^{kn}}{\rho(2^n)}a_n\|_{L^p([0,1],L^p_{(w_k)}(E))} \leq 2\|a\|_{<L^p_{(w_0)}(E),L^p_{(w_1)}(E)>_{\rho,p}} \tag{7}$$

Aplicando a desigualdade de Khintchine-Maurey para E temos

$$\|(\sum_F(\frac{2^{kn}}{\rho(2^n)}|a_n(x)|)^2)^{1/2}\|_E \leq C\|\sum_F \tilde{r}_n(\cdot)\frac{2^{kn}}{\rho(2^n)}a_n(x)\|_{L^p([0,1],E)}$$

e usando o Teorema de Fubini

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \|(\sum_F(\frac{2^{kn}}{\rho(2^n)}|a_n(x)|)^2)^{1/2}w_k(x)\|_E d\mu &\leq C^p\int_\Omega\int_0^1 \|(\sum_F \tilde{r}_n(t)\frac{2^{kn}}{\rho(2^n)}a_n(x))w_k(x)\|_E^p dt d\mu \\
&= C^p\int_0^1 \|\sum_F \tilde{r}_n(t)\frac{2^{kn}}{\rho(2^n)}a_n\|^p_{L^p_{(w_k)}(E)}dt
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\|(\sum_F(\frac{2^{kn}}{\rho(2^n)}|a_n|)^2)^{1/2}\|_{L^p_{(w_k)}(E)} \leq C\|\sum_F \tilde{r}_n(\cdot)\frac{2^{kn}}{\rho(2^n)}a_n\|_{L^p([0,1],L^p_{(w_k)}(E))}. \tag{8}$$

Como $(\tilde{r}_n(\cdot)2^{kn}a_n/\rho(2^n))_{n\in\mathbb{Z}}$ é $L^p([0,1],L^p_{(w_k)}(E))$-somável segue que dado $\varepsilon > 0$ existe $F_\varepsilon \subset \mathbb{Z}$ finito tal que se $F' \subset \mathbb{Z}$ é finito com $F' \cap F_\varepsilon = \emptyset$ então usando (8), temos

$$\|(\sum_{F'}(\frac{2^{kn}}{\rho(2^n)}|a_n|)^2)^{1/2}\|_{L^p_{(w_k)}(E)} \leq \varepsilon. \tag{9}$$

Da Proposição 1.3 temos que

$$\|\sum_F a_n(x)\|_E \leq CR(\|(\sum_F(\frac{1}{\rho(2^n)}|a_n(x)|)^2)^{1/2}\|_E, \|(\sum_F(\frac{2^n}{\rho(2^n)}|a_n(x)|)^2)^{1/2}\|_E)$$

e então fazendo $A_k = (\sum_F(2^{kn}|a_n(x)|/\rho(2^n))^2)^{1/2}$ vamos ter que

$$\begin{aligned}
\|\sum_F a_n(x)w(x)\|_E^p &\leq C^p(R(\|A_0\|_E,\|A_1\|_E)w(x))^p \\
&= C^p(R(\|\frac{A_0w_0(x)}{w_0(x)}\|_E,\|\frac{A_1w_1(x)}{w_1(x)}\|_E)w(x))^p \\
&\leq C^p\left(\max_{k=0,1}\|A_kw_k(x)\|_E R\left(\frac{1}{w_0(x)},\frac{1}{w_1(x)}\right)w(x)\right)^p \\
&= C^p\max_{k=0,1}\|A_kw_k(x)\|_E^p\left(\frac{1}{w_0(x)}\rho\left(\frac{w_0(x)}{w_1(x)}\right)w(x)\right)^p \\
&= C^p\max_{k=0,1}\|A_kw_k(x)\|_E^p
\end{aligned}$$

Assim,

$$(10)\qquad \int_\Omega ||\sum_F a_n(x)w(x)||_E^p \leq C^p \max_{k=0,1} \int_\Omega ||(\sum_F (\frac{2^{kn}}{\rho(2^n)}|a_n(x)|)^2)^{1/2})w_k(x)||_E^p d\mu$$

e usando (9) segue que

$$(11)\qquad ||\sum_{F'} a_n||_{L^p_{(w)}(E)} \leq C \max_{k=0,1} ||(\sum_{F'}(\frac{2^{kn}}{\rho(2^n)}|a_n|)^2)^{1/2})||_{L^p_{(w_k)}(E)} \leq C\varepsilon$$

e então $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ é somável em $L^p_{(w)}(E)$. Usando a primeira inclusão e o Teorema III.2.2, concluímos que $a = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n$ em $L^p_{(w)}(E)$. Finalmente usando (7), (8) e (11) temos

$$||\sum_F a_n||_{L^p_{(w)}(E)} \leq C||a||_{<L^p_{(w_0)}(E), L^p_{(w_1)}(E)_{\rho,p}}$$

donde passando o limite obtemos

$$||a||_{L^p_{(w)}(E)} \leq C||a||_{<L^p_{(w_0)}(E), L^p_{(w_1)}(E)_{\rho,p}}$$

e o Teorema fica demonstrado.

3. CASO $\rho(t) = t^\theta$

Tomando $\rho(t) = t^\theta$ obteremos resultados mais gerais que os Teoremas 2.1 e 2.2. Mas necessitaremos do seguinte Lema.

3.1. LEMA: Sejam (E_0, E_1) um par de Banach formado de reticulados de Banach com concavidade finita, $\rho(t) = t^\theta$, $0 < \theta < 1$, $a \in < E_0, E_1 >_{\rho,p}$ e $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ uma sequência admissível para a. Então

$$(1)\qquad ||a||_{<E_0,E_1>_{\rho,p}} \leq C \sup_F ||(\sum_F (2^{-n\theta}|a_n|)^2)^{1/2}||_{E_0}^{1-\theta} ||(\sum_F 2^{(1-\theta)n}|a_n|)^2)^{1/2}||_{E_1}^\theta$$

Demonstração. Seja $t \in \mathbb{R}$ e $[t]$ o menor inteiro maior ou igual a t. Temos que

$$(2)\qquad t \leq [t] \leq t+1$$

Considerando $b_n = a_{n+[t]}$, temos que $(b_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ é uma sequência admissível para a. Com efeito, certamente temos que $a = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n$. Além disso, dado $\varepsilon > 0$ existe $F_\varepsilon \subset \mathbb{Z}$ finito tal que se $F' \cap F_\varepsilon = \emptyset$ com $F' \subset \mathbb{Z}$ finito temos

$$||\sum_{F'} \tilde{r}_n(\cdot)2^{(k-\theta)n}a_n||_{L^p([0,1],(E_k))} < \varepsilon \quad , k = 0, 1.$$

Seja $F_\varepsilon^{[t]} = F_\varepsilon + [t]$ e $F' \subset \mathbb{Z}$ finito tal que $F' \cap F_\varepsilon^{[t]} = \emptyset$. Então $(F' - [t]) \cap F_\varepsilon = \emptyset$ e usando a desigualdade de Khintchine-Maurey temos

$$
\begin{aligned}
(3)\quad \|\sum_{F'} \tilde{r}_n(\cdot)2^{(k-\theta)n} b_n\|_{L^p([0,1],(E_k))} &\leq C\|\sum_{F'}(2^{(k-\theta)n}a_{n+[t]})^2)^{1/2}\|_{E_k} \\
&= C\|\sum_{F'-[t]}(2^{(k-\theta)(n-[t])}a_n)^2)^{1/2}\|_{E_k} \\
&= 2^{(\theta-k)[t]}C\|\sum_{F'-[t]}(2^{(k-\theta)n}a_n)^2)^{1/2}\|_{E_k} \\
&\leq 2^{(\theta-k)[t]}C\|\sum_{F'-[t]}\tilde{r}_n(\cdot)2^{(k-\theta)n}a_n\|_{L^p([0,1],(E_k))} \\
&< 2^{(\theta-k)[t]}C\varepsilon
\end{aligned}
$$

mostrando que $(\tilde{r}_n(\cdot)2^{(k-\theta)n}b_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ é $L^p([0,1],(E_k))$-somável. Do mesmo modo mostramos que

$$
(4)\sup_F \|\sum_F \tilde{r}_n(\cdot)2^{(k-\theta)n}b_n\|_{L^p([0,1],(E_k))} \leq 2^{(\theta-k)[t]}C \sup_F \|\sum_F \tilde{r}_n(\cdot)2^{(k-\theta)n}a_n\|_{L^p([0,1],(E_k))}.
$$

Logo $(b_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ é uma sequência admissível para a. Assim usando (2) e um cálculo análogo a (3) temos

$$
\begin{aligned}
\|a\|_{<E_0,E_1>_{\rho,p}} &\leq \max_{k=0,1}\sup_F \|\sum_F \tilde{r}_n(\cdot)2^{(k-\theta)n}b_n\|_{L^p([0,1],(E_k))} \\
&\leq C\sup_F\left(2^{\theta[t]}\|\sum_F(2^{-n\theta}a_n)^2)^{1/2}\|_{E_0} + 2^{-(1-\theta)[t]}\|\sum_F(2^{(1-\theta)n}a_n)^2)^{1/2}\|_{E_1}\right) \\
&\leq C\sup_F\left(2^{\theta(t+1)}\|\sum_F(2^{-n\theta}a_n)^2)^{1/2}\|_{E_0} + 2^{-t(1-\theta)}\|\sum_F(2^{(1-\theta)n}a_n)^2)^{1/2}\|_{E_1}\right) \\
&\leq 2^\theta C\sup_F\left(2^{\theta t}\|\sum_F(2^{-n\theta}a_n)^2)^{1/2}\|_{E_0} + 2^{-t(1-\theta)}\|\sum_F(2^{(1-\theta)n}a_n)^2)^{1/2}\|_{E_1}\right)
\end{aligned}
$$

Agora, notando que para $t = \log_2 \frac{y}{x}$ temos

$$
2^{t\theta}x + 2^{-t(1-\theta)}y = 2x^{1-\theta}y^\theta,
$$

e podemos concluir (1).

3.2. TEOREMA: Sejam (E_0, E_1) um par de Banach formado de reticulados de Banach com concavidade finita e w um peso. Então para $\rho(t) = t^\theta$, $0 < \theta < 1$, $1 \leq p_0, p_1 < \infty$ e

$$(1) \qquad \frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$$

temos

$$(2) \qquad < L^{p_0}_{(w)}(E_0), L^{p_1}_{(w)}(E_1) >_{\rho,p} = L^p_{(w)}(< E_0, E_1 >_{\rho,p})$$

com equivalência de normas.

Demonstração. Seja $a \in L^p_{(w)}(< E_0, E_1 >_{\rho,p})$ uma função tal que aw é simples a valores em $< E_0, E_1 >_{\rho,p}$, isto é,

$$aw = \sum_{j=1}^{N} a_j \chi_{B_j}$$

onde $a_j \in < E_0, E_1 >_{\rho,p}$ e suponhamos que $||a||_{L^p_{(w)}(<E_0,E_1>_{\rho,p})} \leq 1$. Para cada $j = 1, \cdots, N$ seja $(a^j_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ uma sequência admissível para a_j tal que

$$(3) \qquad \max_{k=0,1} \sup_F || \sum_F \tilde{r}_n(\cdot) 2^{(k-\theta)n} a^j_n ||_{L^p([0,1],E_k)} \leq 2||a_j||_{<E_0,E_1>_{\rho,p}},$$

ou, usando a desigualdade de Khintchine-Maurey para E_k,

$$(4) \qquad \max_{k=0,1} \sup_F ||(\sum_F (2^{(k-\theta)n}|a^j_n|)^2)^{1/2}||_{E_k} \leq C||a_j||_{<E_0,E_1>_{\rho,p}}.$$

Consideremos agora λ definido por

$$(5) \qquad p_0(1-\lambda\theta) = p.$$

Desta forma λ também satisfaz a equação

$$(6) \qquad p_1(1+\lambda(1-\theta)) = p,$$

pois, usando (1) e (5), temos

$$\begin{aligned} 1 &= (1-\theta)(1-\lambda\theta) + \theta\frac{p}{p_1} \\ &= 1 - \theta - \lambda\theta + \lambda\theta^2 + \theta\frac{p}{p_1} \end{aligned}$$

donde

$$1 + \lambda - \lambda\theta = \frac{p}{p_1}$$

implicando em (6).

Para cada $n \in \mathbb{Z}$ seja a_n definida por

$$a_n(x)w(x) = \begin{cases} a^j_{n-z} & \text{se } x \in B_j\ , j = 1, \cdots N, \\ 0 & \text{se } x \notin \cup B_j \end{cases}$$

onde $z = [t] = [\lambda \log_2 ||a_j||_{<E_0,E_1>_{\rho,p}}]$. Mostremos que $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ é uma sequência admissível para a. Seja então $F \subset \mathbb{Z}$ um conjunto finito qualquer. Segue de (4), (5), (6), o Lema III.2.4, a desigualdade de Khintchine-Maurey e o Teorema de Fubini, que

$$\begin{aligned}
&||\sum_F \tilde{r}_n(\cdot)2^{(k-\theta)n}a_n||_{L^p([0,1],L^{p_k}_{(w)}(E_k))} \leq C||\sum_F \tilde{r}_n(\cdot)2^{(k-\theta)n}a_n||_{L^{p_k}([0,1],L^{p_k}_{(w)}(E_k))} \\
&= C\left(\int_0^1 \int_\Omega ||(\sum_F \tilde{r}_n(t)2^{(k-\theta)n}a_n(x))w(x)||^{p_k}_{E_k} d\mu dt\right)^{1/p_k} \\
&= C\left(\sum_{j=1}^N \int_{B_j}\int_0^1 ||\sum_F \tilde{r}_n(t)2^{(k-\theta)n}a^j_{n-z}||^{p_k}_{E_k} dtd\mu\right)^{1/p_k} \\
&\leq C\left(\sum_{j=1}^N \int_{B_j} ||\sum_F (2^{(k-\theta)n}|a^j_{n-z}|)^2)^{1/2}||^{p_k}_{E_k} d\mu\right)^{1/p_k} \\
&= C\left(\sum_{j=1}^N \int_{B_j} ||\sum_{F+z} (2^{(k-\theta)n}|a^j_{n}|)^2)^{1/2}||^{p_k}_{E_k} 2^{(k-\theta)zp_k} d\mu\right)^{1/p_k} \\
&\leq C\left(\sum_{j=1}^N \int_{B_j} C^{p_k}||a_j||^{p_k}_{<E_0,E_1>_{\rho,p}} 2^{(k-\theta)(k+\lambda\log_2 ||a_j||_{<E_0,E_1>_{\rho,p}})p_k} d\mu\right)^{1/p_k} \\
&= C2^{(k-\theta)k}\left(\sum_{j=1}^N \int_{B_j} ||a_j||^{p_k}_{<E_0,E_1>_{\rho,p}} ||a_j||^{\lambda(k-\theta)p_k}_{<E_0,E_1>_{\rho,p}} d\mu\right)^{1/p_k} \\
&= C2^{(k-\theta)k}\left(\sum_{j=1}^N \int_{B_j} ||a_j||^{p_k+\lambda(k-\theta)p_k}_{<E_0,E_1>_{\rho,p}} d\mu\right)^{1/p_k} \\
&= C2^{(k-\theta)k}\left(\int_\Omega ||a(x)w(x)||^p_{<E_0,E_1>_{\rho,p}} d\mu\right)^{1/p_k} \\
&= C2^{(k-\theta)k}||a||^{p/p_k}_{L^p_{(w)}(<E_0,E_1>_{\rho,p})} \leq C2^{(k-\theta)k}.
\end{aligned}$$

Fica então demonstrado que $a_n \in L^{p_0}_{(w)}(E_0) \cap L^{p_1}_{(w)}(E_1)$ e que

$$||\sum_F \tilde{r}_n(\cdot)2^{(k-\theta)n}a_n||_{L^p([0,1],L^{p_k}_{(w)}(E_k))} \leq C. \tag{7}$$

Consideremos agora $F_0 \subset \mathbb{Z}_-$ e $F_1 \subset \mathbb{Z}_+$ subconjuntos finitos quaisquer. Segue de (3), (5) e (6) que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega ||\sum_{F_k} a_n(x)w(x)||_{E_k}^{p_k} d\mu &= \sum_{j=1}^{N} \int_{B_j} ||\sum_{F_k} a_{n-z}^j||_{E_k}^{p_k} d\mu \\
&\leq \sum_{j=1}^{N} \int_{B_j} \left(\sum_{F_k+z} 2^{(\theta-k)(n+z)} ||2^{(k-\theta)n} a_n^j||_{E_k} 2^{(k-\theta)z} \right)^{p_k} d\mu \\
&\leq \sum_{j=1}^{N} \int_{B_j} \left(2 \sum_{F_k+z} 2^{(\theta-k)(n+z)} ||a_j||_{<E_0,E_1>_{\rho,p}} 2^{(k-\theta)(k+\lambda \log_2 ||a_j||_{<E_0,E_1>_{\rho,p}}} \right)^{p_k} d\mu \\
&= \sum_{j=1}^{N} \int_{B_j} \left(2 \sum_{F_k} 2^{(\theta-k)n} ||a_j||_{<E_0,E_1>_{\rho,p}} ||a_j||_{<E_0,E_1>_{\rho,p}}^{(k-\theta)\lambda} 2^{(k-\theta)k} \right)^{p_k} d\mu \\
&= \sum_{j=1}^{N} \int_{B_j} (2^{1+(k-\theta)k} \sum_{F_k} 2^{(\theta-k)n})^{p_k} ||a_j||_{<E_0,E_1>_{\rho,p}}^{(1+(k-\theta)\lambda)p_k} d\mu \\
&= (2^{1+k(k-\theta)} \sum_{F_k} 2^{(\theta-k)n})^{p_k} \int_\Omega ||a(x)w(x)||_{<E_0,E_1>_{\rho,p}}^{p} d\mu \\
&\leq (2^{1+k(k-\theta)} \sum_{F_k} 2^{(\theta-k)n})^{p_k}
\end{aligned}$$

Assim

(8) $$||\sum_{F_k} a_n||_{L_{(w)}^{p_k}(E_k)} \leq 2^{1+k(k-\theta)} \sum_{F_k} 2^{(\theta-k)n}$$

o que mostra que $(a_n)_{n<0}$ é $L_{(w)}^{p_0}(E_0)$-somável e $(a_n)_{n\geq 0}$ é $L_{(w)}^{p_1}(E_1)$-somável. Considerando $b_0 = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n$ e $b_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ em $L_{(w)}^{p_0}(E_0)$ e $L_{(w)}^{p_1}(E_1)$ respectivamente, podemos concluir como no Teorema 2.1 que $a = b_0 + b_1$ e então $a = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n$ com convergência em $L_{(w)}^{p_0}(E_0) + L_{(w)}^{p_1}(E_1)$. Vamos verificar agora que $(\tilde{r}_n(\cdot)2^{(k-\theta)n} a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ é $L^p([0,1], L_{(w)}^{p_k}(E_k))$-somável. Como $(\tilde{r}_n(\cdot)2^{(k-\theta)n} a_n^j)_{n\in\mathbb{Z}}$ é (absolutamente) somável em $L^p([0,1], E_k)$ segue que dado $\varepsilon > 0$, existem $F_\varepsilon^j \subset \mathbb{Z}$ finitos, $j = 1, \cdots, N$ tais que se $F' \cap F_\varepsilon^j = \emptyset$ com $F' \subset \mathbb{Z}$ finito então

(9) $$\begin{aligned}
\sum_{F'} ||\tilde{r}_n(\cdot)2^{(k-\theta)n} a_n^j||_{L^p([0,1],E_k)} &= \sum_{F'} ||2^{(k-\theta)n} a_n^j||_{E_k} \\
&\leq \frac{\varepsilon^{1/p_k}}{2^{(k-\theta)k} ||a_j||_{<E_0,E_1>_{\rho,p}}^{\lambda(k-\theta)} (\sum_{j=1}^{N} \mu(B_j))^{1/p_k}}.
\end{aligned}$$

Consideremos então $F_\varepsilon = \cup_{j=1}^N (F_\varepsilon^j - z)$ e $F' \subset \mathbb{Z}$ finito com $F' \cap F_\varepsilon = \emptyset$. Logo $(F' + z) \cap F_\varepsilon^j = \emptyset$ para cada $j = 1, \cdots, N$ e usando (5), (6) e (9) temos

$$\int_\Omega ||(\sum_{F'} \tilde{r}_n(t) 2^{(k-\theta)n} a_n(x)) w(x)||_{E_k}^{p_k} d\mu \leq \sum_{j=1}^N \int_{B_j} (\sum_{F'+z} ||2^{(k-\theta)n} a_n^j||_{E_k} 2^{(k-\theta)z})^{p_k} d\mu$$

$$\leq \sum_{j=1}^N \int_{B_j} \left(\frac{\varepsilon^{1/p_k}}{2^{(k-\theta)k} ||a_j||_{<E_0,E_1>_{\rho,p}}^{\lambda(k-\theta)} (\sum_{j=1}^N \mu(B_j))^{1/p_k}} 2^{(k-\theta)(k+\lambda \log_2 ||a_j||_{<E_0,E_1>_{\rho,p}})} \right)^{p_k} d\mu$$

$$= \sum_{j=1}^N \int_{B_j} \left(\frac{2^{(k-\theta)k} ||a_j||_{<E_0,E_1>_{\rho,p}}^{\lambda(k-\theta)} \varepsilon^{1/p_k}}{2^{(k-\theta)k} ||a_j||_{<E_0,E_1>_{\rho,p}}^{\lambda(k-\theta)} (\sum_{j=1}^N \mu(B_j))^{1/p_k}} \right)^{p_k} d\mu = \varepsilon$$

o que prova a somabilidade desejada. Concluímos então que $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ é uma sequência admissível para a. Finalmente segue de (7) que

$$||a||_{<L_{(w)}^{p_0}(E_0), L_{(w)}^{p_1}(E_1)>_{\rho,p}} \leq C$$

A conclusão da inclusão

$$L_{(w)}^p(< E_0, E_1 >_{\rho,p}) \hookrightarrow < L_{(w)}^{p_0}(E_0), L_{(w)}^{p_1}(E_1) >_{\rho,p}$$

segue por densidade como no Teorema 2.1.

Consideremos agora $a \in < L_{(w)}^{p_0}(E_0), L_{(w)}^{p_1}(E_1) >_{\rho,p}$ com $||a||_{<L_{(w)}^{p_0}(E_0), L_{(w)}^{p_1}(E_1)>_{\rho,p}} < 1$ e seja $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ uma sequência admissível para a tal que

$$(10) \qquad \max_{k=0,1} \sup_F || \sum_F \tilde{r}_n(\cdot) 2^{(k-\theta)n} a_n ||_{L^p([0,1], L_{(w)}^{p_k}(E_k))} \leq 1$$

ou usando a desigualdade de Khintchine-Maurey para E_k, segue de (10) que

$$(11) \qquad \max_{k=0,1} \sup_F ||(\sum_F (2^{(k-\theta)n} |a_n|)^2)^{1/2}||_{L_{(w)}^{p_k}(E_k)} \leq C$$

Temos que $(\tilde{r}_n(\cdot) 2^{(k-\theta)n} a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ é $L^p([0,1], L_{(w)}^{p_k}(E_k))$-somável, e então dado $\varepsilon > 0$ existe $F_\varepsilon \subset \mathbb{Z}$ finito tal que se $F' \cap F_\varepsilon = \emptyset$ com $F' \subset \mathbb{Z}$ finito, segue após usarmos a desigualdade de Khintchine-Maurey que

$$(12) \qquad ||(\sum_{F'} (2^{(k-\theta)n} |a_n|)^2)^{1/2}||_{L_{(w)}^{p_k}(E_k)} < \varepsilon$$

Consideremos agora

$$b_n(x) = \begin{cases} a_n(x) & \text{se } n \in F', \\ 0 & \text{se } n \notin F'. \end{cases}$$

Assim, como no Teorema 2.1 temos que $(b_n(x))_{n\in\mathbb{Z}}$ é uma sequência admissível para $\sum_{F'} a_n(x)$. Usando o Lema 3.1 temos que

$$\begin{aligned}
&||\sum_{F'} a_n(x)||_{<E_0,E_1>_{\rho,p}} \leq \\
&\quad \leq C \sup_G ||(\sum_G (2^{-\theta n}|b_n(x)|)^2)^{1/2}||_{E_0}^{1-\theta} ||(\sum_G (2^{(1-\theta)n}|b_n(x)|)^2)^{1/2}||_{E_1}^{\theta} \\
&\quad = C \sup_{G\subset F'} ||(\sum_G (2^{-\theta n}|b_n(x)|)^2)^{1/2}||_{E_0}^{1-\theta} ||(\sum_G (2^{(1-\theta)n}|b_n(x)|)^2)^{1/2}||_{E_1}^{\theta} \\
&\quad \leq C ||(\sum_{F'} (2^{-\theta n}|a_n(x)|)^2)^{1/2}||_{E_0}^{1-\theta} ||(\sum_{F'} (2^{(1-\theta)n}|a_n(x)|)^2)^{1/2}||_{E_1}^{\theta}
\end{aligned}$$

e então

$$\begin{aligned}
&||\sum_{F'} a_n(x)w(x)||_{<E_0,E_1>_{\rho,p}} \leq \\
&\quad \leq C||(\sum_{F'} 2^{-\theta n}|a_n(x)|)^2)^{1/2}w(x)||_{E_0}^{1-\theta} ||(\sum_{F'} 2^{(1-\theta)n}|a_n(x)|)^2)^{1/2}w(x)||_{E_1}^{\theta}
\end{aligned}$$

Agora, integrando a inequação acima e usando a desigualdade de Hölder $(\frac{1-\theta}{p_0}p + \frac{\theta}{p_1}p = 1)$ e (12) temos que

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega ||\sum_{F'} a_n(x)w(x)||_{<E_0,E_1>_{\rho,p}}^p d\mu \leq \\
\leq \;& C^p \int_\Omega ||(\sum_{F'} 2^{-\theta n}|a_n(x)|)^2)^{1/2}w(x)||_{E_0}^{(1-\theta)p} ||(\sum_{F'} 2^{(1-\theta)n}|a_n(x)|)^2)^{1/2}w(x)||_{E_1}^{\theta p} d\mu \\
\leq \;& C^p \left(\int_\Omega ||(\sum_{F'} 2^{-\theta n}|a_n(x)|)^2)^{1/2}w(x)||_{E_0}^{p_0} d\mu \right)^{\frac{1-\theta}{p_0}p} \times \\
& \times \left(\int_\Omega ||(\sum_{F'} 2^{(1-\theta)n}|a_n(x)|)^2)^{1/2}w(x)||_{E_1}^{p_1} d\mu \right)^{\frac{\theta}{p_1}p} \\
\leq \;& C^p \varepsilon^{(1-\theta)p}\varepsilon^{\theta p} = C^p\varepsilon^p
\end{aligned}$$

ou seja

$$(13) \qquad ||\sum_{F'} a_n||_{L^p_{(w)}(<E_0,E_1>_{\rho,p})} \leq C\varepsilon.$$

Assim temos que $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ é somável em $L^p_{(w)}(< E_0, E_1 >_{\rho,p})$. Segue da primeira inclusão e do Teorema III.2.2(1) que $a = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n$ com convergência em

$L^p_{(w)}(< E_0, E_1 >_{\rho,p})$. Agora exatamente da mesma maneira à que obtivemos (13) temos para $F \subset \mathbb{Z}$ finito qualquer que

$$(14) \qquad \|\sum_F a_n\|_{L^p_{(w)}(<E_0,E_1>_{\rho,p})} \leq C$$

e após passagem ao limite em (14) concluímos o Teorema.

3.3. TEOREMA: Sejam E um reticulado de Banach com concavidade finita e w_0, w_1 dois pesos. Então para $\rho(t) = t^\theta$, $0 < \theta < 1$, $1 \leq p_0, p_1 < \infty$,

$$(1) \qquad \frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$$

e

$$(2) \qquad w = w_0^{1-\theta} w_1^\theta,$$

temos

$$(3) \qquad < L^{p_0}_{(w_0)}(E), L^{p_1}_{(w_1)}(E) >_{\rho,p} = L^p_{(w)}(E).$$

com equivalência de normas.

Demonstração. Seja $a \in L^p_{(w)}(E)$ com $\|a\|_{L^p_{(w)}(E)} \leq 1$ e $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ definida como no Teorema 2.2, mas agora

$$B_n = \{x \in \Omega : \|a(x)\|_E^{p/r} w_0^{p/p_1}(x) w_1^{-p/p_0}(x) \in [2^{n-1}, 2^n)\}$$

onde

$$(4) \qquad \frac{1}{r} = \frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_0}.$$

Das relações (1) e (4) temos que

$$(5) \qquad p_0(1 - \frac{\theta}{p_1}p) = (1-\theta)p \ , \ p_1(1 - \frac{1-\theta}{p_0}p) = \theta p$$

e

$$(6) \qquad p_0(1 - \frac{\theta}{r}p) = p = p_1(1 - \frac{1-\theta}{r}p)$$

Verifiquemos que $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ é uma sequência admissível para a. Seja $F \subset \mathbb{Z}$ um conjunto finito qualquer, então usando (2), (5) e (6) temos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \|(\sum_F \tilde{r}_n(t)2^{-\theta n}a_n)w_0(x)\|_E^{p_0}d\mu &= \sum_{n\in F}\int_{B_n}\|2^{-\theta n}\lambda_n a(x)w_0(x)\|_E^{p_0}d\mu \\
&\leq \sum_{n\in F}\lambda_n^{p_0}\int_{B_n}\|a(x)\|_E^{p_0}w_0^{p_0}(x)\|a(x)\|_E^{-\theta p_0 p/r}w_0^{-\theta p_0 p/p_1}(x)w_1^{\theta p_0 p/p_0}(x)d\mu \\
&\leq (\sum_{n\in F}\lambda_n)^{p_0}\int_{B_n}\|a(x)\|_E^{p_0(1-\theta p/r)}w_0^{p_0(1-\theta p/p_1)}(x)w_1^{\theta p}(x)d\mu \\
&= (\sum_{n\in F}\lambda_n)^{p_0}\int_{B_n}\|a(x)\|_E^{p}w_0^{(1-\theta)p}(x)w_1^{\theta p}(x)d\mu \\
&\leq (\sum_{n\in F}\lambda_n)^{p_0}\int_{\Omega}\|a(x)w(x)\|_E^{p}d\mu \leq (\sum_{n\in F}\lambda_n)^{p_0}
\end{aligned}$$

Do mesmo modo,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \|(\sum_F \tilde{r}_n(t)2^{(1-\theta)n}a_n)w_1(x)\|_E^{p_1}d\mu &= \sum_{n\in F}\int_{B_n}\|2^{(1-\theta)n}\lambda_n a(x)w_1(x)\|_E^{p_1}d\mu \\
&\leq \sum_{n\in F}\lambda_n^{p_1}\int_{B_n}\|a(x)\|_E^{p_1}w_1^{p_1}(x)2^{(1-\theta)p_1}\|a(x)\|_E^{(1-\theta)p_1p/r}w_0^{(1-\theta)p_1p/p_1}(x)w_1^{-(1-\theta)p_1p/p_0}(x)d\mu \\
&\leq (2^{(1-\theta)}\sum_{n\in F}\lambda_n)^{p_1}\int_{B_n}\|a(x)\|_E^{p_1(1+(1-\theta)p/r)}w_0^{(1-\theta)p}(x)w_1^{p_1(1-(1-\theta)p/p_0)}(x)d\mu \\
&= (2^{(1-\theta)}\sum_{n\in F}\lambda_n)^{p_1}\int_{B_n}\|a(x)\|_E^{p}w_0^{(1-\theta)p}(x)w_1^{\theta p}(x)d\mu \\
&\leq (2^{(1-\theta)}\sum_{n\in F}\lambda_n)^{p_1}\int_{\Omega}\|a(x)w(x)\|_E^{p}d\mu \leq (2^{(1-\theta)}\sum_{n\in F}\lambda_n)^{p_1}
\end{aligned}$$

Concluímos então que $a_n \in L^{p_0}_{(w_0)}(E)\cap L^{p_1}_{(w_1)}(E)$ e

$$\|\sum_F \tilde{r}_n(\cdot)2^{(k-\theta)n}a_n\|_{L^p([0,1],L^{p_k}_{(w_k)}(E))} \leq 2^{k(1-\theta)}\sum_{n\in F}\lambda_n. \tag{7}$$

Podemos concluir também de (7) que $(\tilde{r}_n(\cdot)2^{(k-\theta)n}a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ é $L^p([0,1],L^{p_k}_{(w_k)}(E))$-somável e que

$$\max_{k=0,1}\sup_F\|\sum_F \tilde{r}_n(\cdot)2^{(k-\theta)n}a_n\|_{L^p([0,1],L^{p_k}_{(w_k)}(E))} \leq 2^{1-\theta}. \tag{8}$$

Finalmente consideremos $F_0\subset\mathbb{Z}_-$ e $F_1\subset\mathbb{Z}_+$ subconjuntos finitos quaisquer. Segue de (2), (5) e (6) que

$$\begin{aligned}\int_\Omega \|\sum_{F_0} a_n(x)w_0(x)\|_E^{p_0}d\mu &\leq (\sum_{F_0}\lambda_n)^{p_0}\int_{B_n} 2^{\theta n p_0}\|2^{-\theta n}a(x)w_0(x)\|_E^{p_0}d\mu \\ &\leq (\sum_{F_0}\lambda_n)^{p_0}\end{aligned}$$

e do mesmo modo

$$\begin{aligned}\int_\Omega \|\sum_{F_1} a_n(x)w_1(x)\|_E^{p_1}d\mu &\leq (\sum_{F_1}\lambda_n)^{p_1}\int_{B_n} 2^{(\theta-1)np_1}\|2^{(1-\theta)n}a(x)w_1(x)\|_E^{p_1}d\mu \\ &\leq (2^{(1-\theta)p_1}\sum_{F_1}\lambda_n)^{p_1}.\end{aligned}$$

Logo,

$$\|\sum_{F_k} a_n\|_{L^{p_k}_{(w_k)}(E)} \leq 2^{k(1-\theta)}\sum_{F_k}\lambda_n$$

e então $(a_n)_{n<0}$ é $L^{p_0}_{(w_0)}(E)$-somável e $(a_n)_{n\geq 0}$ é $L^{p_1}_{(w_1)}(E)$-somável. Considerando $b_0 = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n$ e $b_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ em $L^{p_0}_{(w_0)}(E)$ e $L^{p_1}_{(w_1)}(E)$ respectivamente podemos concluir como no Teorema 2.2 que $a = b_0 + b_1$ e $a = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n$ com convergência em $L^{p_0}_{(w_0)}(E)+L^{p_1}_{(w_1)}(E)$. Desta forma demonstramos que $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ é uma sequência admissível para a e de (8) segue que

$$\|a\|_{<L^{p_0}_{(w_0)}(E),L^{p_1}_{(w_1)}(E)>_{\rho,p}} \leq 2^{1-\theta}$$

mostrando que

$$L^p_{(w)}(E) \hookrightarrow < L^{p_0}_{(w_0)}(E), L^{p_1}_{(w_1)}(E) >_{\rho,p} .$$

Para demonstrarmos a outra inclusão vamos considerar $a \in < L^p_{(w_0)}(E), L^p_{(w_1)}(E) >_{\rho,p}$ com $\|a\|_{<L^{p_0}_{(w_0)}(E),L^{p_1}_{(w_1)}(E)>_{\rho,p}} < 1$ e $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ uma sequência admissível para a tal que

$$\max_{k=0,1}\sup_F \|\sum_F \tilde{r}_n(\cdot)2^{(k-\theta)n}a_n\|_{L^p([0,1],L^{p_k}_{(w_k)}(E))} \leq 1 \tag{9}$$

Como no Teorema 2.2, usando a desigualdade de Khintchine-Maurey para E temos

$$\|(\sum_F(2^{(k-\theta)n}|a_n|)^2)^{1/2}\|_{L^{p_k}_{(w_k)}(E)} \leq C\|\sum_F \tilde{r}_n(\cdot)2^{(k-\theta)n}a_n\|_{L^p([0,1],L^{p_k}_{(w_k)}(E))}. \tag{10}$$

Como $(\tilde{r}_n(\cdot)2^{(k-\theta)n}a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ é $L^p([0,1],L^{p_k}_{(w_k)}(E))$-somável segue que dado $\varepsilon > 0$ existe $F_\varepsilon \subset \mathbb{Z}$ finito tal que se $F' \subset \mathbb{Z}$ é finito com $F' \cap F_\varepsilon = \emptyset$ então usando (10), temos

$$(11) \qquad ||(\sum_{F'}(2^{(k-\theta)n}|a_n|)^2)^{1/2}||_{L^{p_k}_{(w_k)}(E)} \leq \varepsilon.$$

Da Proposição 1.3 temos que para qualquer $F \subset \mathbb{Z}$ finito,

$$||\sum_F a_n(x)||_E \leq C||(\sum_F(2^{-\theta n}|a_n(x)|)^2)^{1/2}||_E^{1-\theta}||(\sum_F(2^{(1-\theta)n}|a_n(x)|)^2)^{1/2}||_E^{\theta}$$

e da relação (2) temos então

$$||\sum_F a_n(x)w(x)||_E \leq C||(\sum_F(2^{-\theta n}|a_n(x)|)^2)^{1/2}w_0(x)||_E^{1-\theta}||(\sum_F(2^{(1-\theta)n}|a_n(x)|)^2)^{1/2}w_1(x)||_E^{\theta}$$

Logo, usando a desigualdade de Hölder e (11) temos

$$
\begin{aligned}
(12) \qquad & \int_\Omega ||\sum_{F'} a_n(x)w(x)||_E^p d\mu \leq \\
\leq\ & C^p \int_\Omega ||(\sum_{F'}(2^{-\theta n}|a_n(x)|)^2)^{1/2}w_0(x)||_E^{(1-\theta)p} \times \\
& \times||(\sum_{F'}(2^{(1-\theta)n}|a_n(x)|)^2)^{1/2}w_1(x)||_E^{\theta p} d\mu \\
\leq\ & C^p \left(\int_\Omega ||(\sum_{F'}(2^{-\theta n}|a_n(x)|)^2)^{1/2}w_0(x)||_E^{p_0} d\mu\right)^{\frac{1-\theta}{p_0}p} \times \\
& \times \left(\int_\Omega ||(\sum_{F'}(2^{(1-\theta)n}|a_n(x)|)^2)^{1/2}w_1(x)||_E^{p_1} d\mu\right)^{\frac{\theta}{p_1}p} \\
\leq\ & C^p \varepsilon^{(1-\theta)p}\varepsilon^{\theta p} = (C\varepsilon)^p
\end{aligned}
$$

o que mostra que $||\sum_{F'} a_n||_{L^p_{(w)}(E)} \leq C\varepsilon$, ou seja, $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ é somável em $L^p_{(w)}(E)$. Segue da primeira inclusão e o Teorema III.2.2 que $a = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n$ com convergência em $L^p_{(w)}(E)$. Exatamente do mesmo modo ao que obtivemos (12) temos para $F \subset \mathbb{Z}$ finito qualquer, usando (9) e (10) que

$$(13) \qquad ||\sum_F a_n||_{L^p_{(w)}(E)} \leq C$$

e passando ao limite em (13) concluímos o Teorema.

4. CASOS LIMITES

Os próximos resultados são casos limites do Teorema 3.3. Necessitamos da seguinte definição usada em [11].

4.1. DEFINIÇÃO: Sejam E um espaço de Banach, w um peso e $f \in \mathcal{M}(\Omega, \Sigma, \mu; E)$. Diremos que $f \in L^\infty_{(w)}(E)$ se

$$||f||_{L^\infty_{(w)}(E)} = \sup_{x\in\Omega} ||f(x)w(x)||_E < \infty \qquad \mu - \text{a.e.}$$

4.2. TEOREMA: Sejam E um reticulado de Banach com concavidade finita e w_0, w_1 dois pesos. Então para $\rho(t) = t^\theta$, $0 < \theta < 1$, $1 \leq p_0 < \infty$,

$$(1) \qquad \frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0}$$

e w como no Teorema 3.3(2), temos

$$(2) \qquad < L^{p_0}_{(w_0)}(E), L^\infty_{(w_1)}(E) >_{\rho,p} = L^p_{(w)}(E).$$

com equivalência de normas.

Demonstração. Seja $a \in L^p_{(w)}(E)$ com $||a||_{L^p_{(w)}(E)} \leq 1$ e consideremos $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ como no Teorema 2.2 onde

$$B_n = \{x \in \Omega : ||a(x)w_1(x)||_E^{\frac{1}{\theta-1}} \in [2^{n-1}, 2^n)\}$$

Assim $\Omega = \cup B_n$ e $B_n \cap B_m = \emptyset$ se $n \neq m$. Verifiquemos que $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ é uma sequência admissível para a. Seja $F \subset \mathbb{Z}$ um conjunto finito qualquer, então

$$\begin{aligned}
\int_\Omega ||(\sum_F \tilde{r}_n(t)2^{-\theta n}a_n(x))w_0(x)||_E^{p_0} d\mu &= \sum_{n\in F}\int_{B_n} ||2^{-\theta n}\lambda_n a(x)w_0(x)||_E^{p_0} d\mu \\
&\leq \sum_{n\in F} \lambda_n^{p_0} \int_{B_n} ||a(x)||_E^{p_0} w_0^{p_0}(x) ||a(x)w_1(x)||_E^{-\frac{\theta}{\theta-1}p_0} d\mu \\
&\leq (\sum_{n\in F}\lambda_n)^{p_0} \int_{B_n} ||a(x)||_E^{p_0(1-\frac{\theta}{\theta-1})} w_0^{(1-\theta)p} w_1^{\theta p}(x) d\mu \\
&\leq (\sum_{n\in F}\lambda_n)^{p_0} \int_\Omega ||a(x)w(x)||_E^p d\mu \leq (\sum_{n\in F}\lambda_n)^{p_0}.
\end{aligned}$$

Isto nos mostra que $a_n \in L^{p_0}_{(w_0)}(E)$, $(\tilde{r}_n(\cdot)2^{-\theta n}a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ é somável em $L^p([0,1], L^{p_0}_{(w_0)}(E))$ e que

(3) $$\sup_F \|\sum_F \tilde{r}_n(\cdot)2^{-\theta n}a_n\|_{L^p([0,1],L^{p_0}_{(w_0)}(E))} \leq 1$$

Por outro lado, temos que

$$\begin{aligned}
\|\sum_F \tilde{r}_n(t)2^{(1-\theta)n}a_n\|_{L^\infty_{(w_1)}(E)} &= \sup_{x\in\Omega}\|(\sum_F \tilde{r}_n(t)2^{(1-\theta)n}a_n(x))w_1(x)\|_E \\
&\leq \max_{n\in F}\sup_{x\in B_n}\|2^{1-\theta}2^{(1-\theta)(n-1)}\lambda_n a(x)w_1(x)\|_E \\
&\leq 2^{1-\theta}\sum_{n\in F}\lambda_n \sup_{x\in B_n}\|a(x)w_1(x)\|_E\|a(x)w_1(x)\|_E^{-1} \\
&\leq 2^{1-\theta}\sum_{n\in F}\lambda_n \qquad \mu-\text{a.e.},
\end{aligned}$$

mostrando que $a_n \in L^\infty_{(w_1)}(E)$, $(\tilde{r}_n(\cdot)2^{(k-\theta)n}a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ é $L^p([0,1],L^\infty_{(w_1)}(E))$-somável e que

(4) $$\sup_F \|\sum_F \tilde{r}_n(\cdot)2^{(1-\theta)n}a_n\|_{L^p([0,1],L^\infty_{(w_1)}(E))} \leq 2^{1-\theta}.$$

Agora se $F \subset \mathbb{Z}_-$ é finito, temos

$$\int_\Omega \|\sum_F a_n(x)w_0(x)\|_E^{p_0}d\mu \leq (\sum_F \lambda_n)^{p_0}\int_{B_n}\|2^{-\theta n}a(x)w_0(x)\|_E^{p_0}d\mu \leq (\sum_F \lambda_n)^{p_0}$$

o que mostra que $(a_n)_{n<0}$ é somável em $L^{p_0}_{(w_0)}(E)$. Analogamente se $F \subset \mathbb{Z}_+$ é finito

$$\|\sum_F a_n\|_{L^\infty_{(w_1)}(E)} \leq \max_{n\in F}\sup_{B_n}\|2^{(1-\theta)n}\lambda_n a(x)w_1(x)\|_E \leq 2^{1-\theta}\sum_F \lambda_n$$

mostrando que $(a_n)_{n\geq 0}$ é $L^\infty_{(w_1)}(E)$-somável. Disto podemos concluir como no Teorema 3.3 que $a = \sum_{n=-\infty}^\infty a_n$ com convergência em $L^{p_0}_{(w_0)}(E)+L^\infty_{(w_1)}(E)$. Desta forma demonstramos que $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ é uma sequência admissível para a e de (3) e (4) segue que

$$\|a\|_{<L^{p_0}_{(w_0)}(E),L^\infty_{(w_1)}(E)>_{\rho,p}} \leq 2^{1-\theta}$$

demonstrando que

$$L^p_{(w)}(E) \hookrightarrow < L^{p_0}_{(w_0)}(E), L^\infty_{(w_1)}(E) >_{\rho,p}.$$

Para demonstrarmos a outra inclusão vamos considerar $a \in < L^{p_0}_{(w_0)}(E), L^\infty_{(w_1)}(E) >_{\rho,p}$ com $\|a\|_{<L^{p_0}_{(w_0)}(E),L^\infty_{(w_1)}(E)>_{\rho,p}} < 1$ e $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ uma sequência admissível para a tal que

(5) $$\sup_F \|\sum_F \tilde{r}_n(\cdot)2^{-\theta n}a_n\|_{L^p([0,1],L^{p_0}_{(w_0)}(E))} \leq 1$$

e

(6) $$\sup_F \|\sum_F \tilde{r}_n(\cdot)2^{(1-\theta)n}a_n\|_{L^p([0,1],L^\infty_{(w_1)}(E))} \leq 1$$

Agora usando a desigualdade de Khintchine-Maurey para E em (5) e (6) temos

(7) $$\sup_F \|(\sum_F(2^{-\theta n}|a_n|)^2)^{1/2}\|_{L^{p_0}_{(w_0)}(E)} \leq C$$

e

(8) $$\sup_F \|(\sum_F(2^{(1-\theta)n}|a_n|)^2)^{1/2}\|_{L^\infty_{(w_1)}(E)} \leq C$$

Segue de (8) que se $F \subset \mathbb{Z}$ é finito então

(9) $$\|(\sum_F(2^{(1-\theta)n}|a_n(x)|)^2)^{1/2}w_1(x)\|_E \leq C \qquad \mu - \text{a.e.}$$

Agora como $(\tilde{r}_n(\cdot)2^{(k-\theta)n}a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ é $L^p([0,1],L^{p_0}_{(w_0)}(E))$-somável e $L^p([0,1],L^\infty_{(w_1)}(E))$-somável para $k = 0,1$ respectivamente, segue que dado $\varepsilon > 0$, existe $F_\varepsilon \subset \mathbb{Z}$ finito tal que se $F' \subset \mathbb{Z}$ é finito com $F' \cap F_\varepsilon = \emptyset$ então, após usarmos a desigualdade de Khintchine-Maurey para E, temos

(10) $$\|(\sum_{F'}(2^{-\theta n}|a_n|)^2)^{1/2}\|_{L^{p_0}_{(w_0)}(E)} \leq \varepsilon^{p/p_0}$$

e

(11) $$\|(\sum_{F'}(2^{(1-\theta)n}|a_n|)^2)^{1/2}\|_{L^\infty_{(w_1)}(E)} \leq \varepsilon$$

e então de (11)

(12) $$\|(\sum_{F'}(2^{(1-\theta)n}|a_n(x)|)^2)^{1/2}w_1(x)\|_E \leq \varepsilon \qquad \mu - \text{a.e.}$$

Pela Proposição 1.3 temos que para qualquer $F \subset \mathbb{Z}$ finito,

$$\|\sum_F a_n(x)\|_E \leq C\|(\sum_F(2^{-\theta n}|a_n(x)|)^2)^{1/2}\|_E^{1-\theta}\|(\sum_F(2^{(1-\theta)n}|a_n(x)|)^2)^{1/2}\|_E^\theta$$

e da relação entre w, w_0 e w_1 temos então

$$\|\sum_F a_n(x)w(x)\|_E \leq C\|(\sum_F(2^{-\theta n}|a_n(x)|)^2)^{1/2}w_0(x)\|_E^{1-\theta}\|(\sum_F(2^{(1-\theta)n}|a_n(x)|)^2)^{1/2}w_1(x)\|_E^\theta$$

Usando (9) temos que

$$||\sum_F a_n(x)w(x)||_E \leq C||(\sum_F (2^{-\theta n}|a_n(x)|)^2)^{1/2}w_0(x)||_E^{1-\theta} \qquad \mu - \text{a.e.}$$

Agora, integrando e usando (1) e (10) temos

$$\begin{aligned}\int_\Omega ||\sum_{F'} a_n(x)w(x)||_E^p d\mu &\leq C^p \int_\Omega ||(\sum_{F'}(2^{-\theta n}|a_n(x)|)^2)^{1/2}w_0(x)||_E^{(1-\theta)p} d\mu \\ &= C^p \int_\Omega ||(\sum_{F'}(2^{-\theta n}|a_n(x)|)^2)^{1/2}w_0(x)||_E^{p_0} d\mu < (C\varepsilon)^p\end{aligned}$$

o que mostra que $||\sum_{F'} a_n||_{L^p_{(w)}(E)} \leq C\varepsilon$ e portanto $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ é somável em $L^p_{(w)}(E)$ e como no Teorema 3.3 terminamos a demonstração.

Um outro caso limite do Teorema 3.3 é o seguinte:

4.3. TEOREMA: Sejam E um reticulado de Banach com concavidade finita e w_0, w_1 dois pesos. Então para $\rho(t) = t^\theta$, $0 < \theta < 1$, $1 \leq p_1 < \infty$,

$$(1) \qquad \frac{1}{p} = \frac{\theta}{p_1}$$

e w como no Teorema 3.3(2), temos

$$(2) \qquad < L^\infty_{(w_0)}(E), L^{p_1}_{(w_1)}(E) >_{\rho,p} = L^p_{(w)}(E).$$

com equivalência de normas.

Demonstração. Seja a e $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ definidas como no Teorema anterior, onde agora

$$B_n = \{x \in \Omega : ||a(x)w_0(x)||_E^{1/\theta} \in [2^{n-1}, 2^n)\}.$$

Seja $F \subset \mathbb{Z}$ um conjunto finito qualquer, então

$$\begin{aligned}||\sum_F \tilde{r}_n(t)2^{-\theta n}a_n||_{L^\infty_{(w_0)}(E)} &= \max_{n\in F}\sup_{B_n} ||2^{-\theta n}\lambda_n a(x)w_0(x)||_E \\ &\leq \sum_{n\in F}\lambda_n \sup_{B_n} ||a(x)w_0(x)||_E ||a(x)w_0(x)||_E^{-1} = \sum_{n\in F}\lambda_n\end{aligned}$$

o que nos mostra que $a_n \in L^\infty_{(w_0)}(E)$, $(\tilde{r}_n(\cdot)2^{-\theta n}a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ é somável em $L^p([0,1], L^\infty_{(w_0)}(E))$ e que

$$(3) \qquad \sup_F \|\sum_F \tilde{r}_n(\cdot)2^{-\theta n}a_n\|_{L^p([0,1],L^\infty_{(w_0)}(E))} \leq 1$$

Por outro lado, temos que

$$\begin{aligned}\int_\Omega \|(\sum_F \tilde{r}_n(t)2^{(1-\theta)n}a_n(x)w_1(x)\|_E^{p_1} d\mu &\leq \sum_{n\in F}\lambda_n^{p_1}\int_{B_n}\|2^{1-\theta}2^{(1-\theta)(n-1)}a(x)w_1(x)\|_E^{p_1} \\ &\leq (2^{1-\theta}\sum_{n\in F}\lambda_n)^{p_1}\int_{B_n}\|a(x)w_1(x)\|_E^{p_1}\|a(x)w_0(x)\|_E^{\frac{1-\theta}{\theta}p_1}d\mu \\ &= (2^{1-\theta}\sum_{n\in F}\lambda_n)^{p_1}\int_{B_n}\|a(x)\|_E^{\frac{p_1}{\theta}}w_0^{\frac{1-\theta}{\theta}p_1}(x)w_1^{p_1}(x)d\mu \\ &\leq (2^{1-\theta}\sum_{n\in F}\lambda_n)^{p_1}\int_\Omega \|a(x)w(x)\|_E^p d\mu \leq (2^{1-\theta}\sum_{n\in F}\lambda_n)^{p_1}.\end{aligned}$$

Então $a_n \in L^{p_1}_{(w_1)}(E)$, $(\tilde{r}_n(\cdot)2^{(1-\theta)n}a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ é $L^p([0,1],L^{p_1}_{(w_1)}(E))$-somável e

$$(4) \qquad \sup_F \|\sum_F \tilde{r}_n(\cdot)2^{(1-\theta)n}a_n\|_{L^p([0,1],L^{p_1}_{(w_1)}(E))} \leq 2^{1-\theta}.$$

Com o mesmo procedimento do Teorema 4.2 e usando as técnicas acima concluímos que $(a_n)_{n<0}$ é somável em $L^\infty_{(w_0)}(E)$ e $(a_n)_{n\geq 0}$ é somável em $L^{p_1}_{(w_1)}(E)$, donde concluímos que $a = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n$ com convergência em $L^\infty_{(w_0)}(E) + L^{p_1}_{(w_1)}(E)$. Assim demonstramos que $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ é uma sequência admissível para a e de (3) e (4) segue que

$$\|a\|_{<L^\infty_{(w_0)}(E),L^{p_1}_{(w_1)}(E)>_{\rho,p}} \leq 2^{1-\theta}$$

mostrando que

$$L^p_{(w)}(E) \hookrightarrow < L^\infty_{(w_0)}(E), L^{p_1}_{(w_1)}(E) >_{\rho,p} .$$

A inclusão $< L^\infty_{(w_0)}(E), L^{p_1}_{(w_1)}(E) >_{\rho,p} \hookrightarrow L^p_{(w)}(E)$ demonstra-se de forma totalmente análoga ao Teorema 4.2.

CAPÍTULO V

CARACTERIZAÇÃO DE ESPAÇOS DE ORLICZ COMO ESPAÇOS DE INTERPOLAÇÃO

Veremos neste capítulo que os espaços de Orlicz gerados por funções de Orlicz que juntamente com sua conjugada satisfazem a condição-Δ_2, podem ser caracterizados via interpolação de espaços L^p. Apresentaremos também um caso limite de tal caracterização.

Demonstraremos ainda neste capítulo, como consequêcia desta caracterização, que os espaços de Orlicz descritos acima têm a propriedade U.M.D. (Unconditional Martingale Differences). Uma condição necessária e suficiente para que um espaço de Banach E tenha a propriedade U.M.D. é que a transformada de Hilbert induz uma transformação linear contínua $\mathcal{H}$ de $L^p(\mathbb{R}, E)$ em $L^p(\mathbb{R}, E)$ (ver [2], [3]).

Outra consequência que vamos obter para os espaços de Orlicz acima referidos é que terão as propriedades geométricas de q-concavidade e p-convexidade.

1. CARACTERIZAÇÃO DE ESPAÇOS DE ORLICZ

Antes de demonstrarmos o teorema de caracterização dos espaços de Orlicz reflexivos via interpolação de espaços L^p, vamos relembrar o seguinte fato apresentado em I.1.4(1).

1.1. Seja Φ uma função de Orlicz que satisfaz a condição-Δ_2. Se

(i) $0 < r < q_\Phi$, $0 < s < 1$, $t > 0$ ou $p_\Phi < r < \infty$, $s > 1$, $t > 0$ então existe $C > 1$ tal que

$$\Phi(st) < Cs^r\Phi(t) \tag{1}$$

ou equivalentemente

$$s^{1/r}\Phi^{-1}(t) < \Phi^{-1}(Cst). \tag{2}$$

Mas como Φ^{-1} é uma função concava temos para $\alpha < 1$ que

$$\alpha\Phi^{-1}(t) \le \Phi^{-1}(\alpha t).$$

Logo, se $C > 1$ segue que

$$\Phi^{-1}(Ct) \leq C\Phi^{-1}(t).$$

Desta forma, se r está nas condições de (i), segue de (2) que

$$s^{1/r}\Phi^{-1}(t) < C\Phi^{-1}(st). \tag{3}$$

1.2. TEOREMA: Sejam Φ uma função de Orlicz que juntamente com sua conjugada satisfaçam a condição-Δ_2, w um peso e E um reticulado de Banach com concavidade finita. Então existem p_0, p_1 com $1 < p_0, p_1 < \infty$ tal que

$$< L^{p_0}_{(w)}(E), L^{p_1}_{(w)}(E) >_{\rho,p} = L^{\Phi}_{(w)}(E) \tag{1}$$

com equivalência de normas, onde $1 \leq p \leq \infty$ e

$$\rho(t) = \begin{cases} t^{\frac{p_1}{p_1-p_0}}\Phi^{-1}(t^{\frac{p_0p_1}{p_0-p_1}}), & t > 0, \\ 0 & t = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Demonstração. Segue de I.1.4 que podemos escolher p_0, p_1 com

$$1 < p_1 < q_\Phi \leq p_\Phi < p_0 < \infty. \tag{3}$$

Vamos demonstrar inicialmente que ρ definida por (2) pertence a $\mathcal{P}^{+-}$. Em primeiro lugar provaremos que ρ é quase-concava. Para $0 < t_0 < t_1$ temos que

$$\begin{aligned} \rho(t_0) &= t_0^{\frac{p_1}{p_1-p_0}}\Phi^{-1}(t_0^{\frac{p_0p_1}{p_0-p_1}}) \\ &= t_1^{\frac{p_1}{p_1-p_0}}\left(\left(\frac{t_0}{t_1}\right)^{\frac{p_0p_1}{p_1-p_0}}\right)^{\frac{1}{p_0}}\Phi^{-1}(t_0^{\frac{p_0p_1}{p_0-p_1}}). \end{aligned}$$

Tomando $r = p_0$ e $s = (t_0/t_1)^{\frac{p_0p_1}{p_1-p_0}}$ segue que $r > p_\Phi$ e $s > 1$, e então usando 1.1(3) temos

$$\begin{aligned} \rho(t_0) &\leq Ct_1^{\frac{p_1}{p_1-p_0}}\Phi^{-1}\left(\left(\frac{t_0}{t_1}\right)^{\frac{p_0p_1}{p_1-p_0}} t_0^{\frac{p_0p_1}{p_0-p_1}}\right) \\ &= Ct_1^{\frac{p_1}{p_1-p_0}}\Phi^{-1}(t_1^{\frac{p_0p_1}{p_0-p_1}}) = C\rho(t_1). \end{aligned}$$

De modo análogo temos

$$\frac{\rho(t_1)}{t_1} = t_0^{\frac{p_0}{p_1-p_0}}\left(\left(\frac{t_1}{t_0}\right)^{\frac{p_0p_1}{p_1-p_0}}\right)^{\frac{1}{p_1}}\Phi^{-1}(t_1^{\frac{p_0p_1}{p_0-p_1}}).$$

Considerando agora $r = p_1$ e $s = (t_1/t_0)^{\frac{p_0 p_1}{p_1 - p_0}}$ temos que $r < q_\Phi$ e $0 < s < 1$, e usando novamente 1.1(3)

$$\begin{aligned}\frac{\rho(t_1)}{t_1} &\leq Ct_0^{\frac{p_0}{p_1-p_0}}\Phi^{-1}\left(\left(\frac{t_1}{t_0}\right)^{\frac{p_0p_1}{p_1-p_0}} t_1^{\frac{p_0p_1}{p_0-p_1}}\right)\\ &= Ct_0^{\frac{p_0}{p_1-p_0}}\Phi^{-1}(t_0^{\frac{p_0p_1}{p_0-p_1}}) = C\frac{\rho(t_0)}{t_0}.\end{aligned}$$

Demonstramos assim que ρ é quase-concava. Resta provar que

$$\overline{\rho}(t) = o(\max(1,t)). \tag{4}$$

Para tanto seja

$$0 < \varepsilon < \min\left(\frac{p_1(p_0 - p_\Phi)}{p_\Phi(p_0 - p_1)}, \frac{p_0(q_\Phi - p_1)}{q_\Phi(p_0 - p_1)}\right).$$

Segue de (3) que $0 < \varepsilon < 1$. Verifiquemos que

$$\overline{\rho}(t) \leq C\max(t^\varepsilon, t^{1-\varepsilon}). \tag{5}$$

Considerando $0 < t_0 < t_1$ temos

$$\begin{aligned}\frac{\rho(t_0)}{t_0^\varepsilon} &= t_0^{\frac{p_1}{p_1-p_0}-\varepsilon}\Phi^{-1}(t_0^{\frac{p_0p_1}{p_0-p_1}})\\ &= t_1^{\frac{p_1}{p_1-p_0}-\varepsilon}\left(\left(\frac{t_0}{t_1}\right)^{\frac{p_0p_1}{p_1-p_0}}\right)^{\frac{p_1-p_0}{p_0p_1}\left(\frac{p_1}{p_1-p_0}-\varepsilon\right)}\Phi^{-1}(t_0^{\frac{p_0p_1}{p_0-p_1}}).\end{aligned}$$

Seja r tal que

$$\frac{1}{r} = \frac{p_1 - p_0}{p_0p_1}\left(\frac{p_1}{p_1 - p_0} - \varepsilon\right)$$

e $s = (t_0/t_1)^{\frac{p_0p_1}{p_1-p_0}}$. Segue da escolha de ε que

$$\begin{aligned}\frac{1}{r} &= \frac{1}{p_0} + \frac{p_0 - p_1}{p_0p_1}\varepsilon\\ &< \frac{1}{p_0} + \frac{p_0 - p_1}{p_0p_1}\frac{p_1(p_0 - p_\Phi)}{p_\Phi(p_0 - p_1)}\\ &= \frac{1}{p_0} + \frac{p_0 - p_\Phi}{p_0p_\Phi}\\ &= \frac{1}{p_0} + \frac{1}{p_\Phi} - \frac{1}{p_0} = \frac{1}{p_\Phi}\end{aligned}$$

ou seja $r > p_\Phi$ e $s > 1$. Então segue de 1.1(3) que

$$(6)\qquad \begin{aligned}\frac{\rho(t_0)}{t_0^\varepsilon} &\le C t_1^{\frac{p_1}{p_1-p_0}-\varepsilon}\Phi^{-1}\left(\left(\frac{t_0}{t_1}\right)^{\frac{p_0p_1}{p_1-p_0}} t_0^{\frac{p_0p_1}{p_0-p_1}}\right)\\ &= C\frac{t_1^{\frac{p_1}{p_1-p_0}}}{t_1^\varepsilon}\Phi^{-1}(t_1^{\frac{p_0p_1}{p_0-p_1}}) = C\frac{\rho(t_1)}{t_1^\varepsilon}\end{aligned}$$

Da mesma forma temos

$$\begin{aligned}\frac{\rho(t_1)}{t_1^{1-\varepsilon}} &= t_1^{\frac{p_1}{p_1-p_0}-1+\varepsilon}\Phi^{-1}(t_1^{\frac{p_0p_1}{p_0-p_1}})\\ &= t_0^{\frac{p_0}{p_1-p_0}+\varepsilon}\left(\left(\frac{t_1}{t_0}\right)^{\frac{p_0p_1}{p_1-p_0}}\right)^{\frac{p_1-p_0}{p_0p_1}\left(\frac{p_0}{p_1-p_0}+\varepsilon\right)}\Phi^{-1}(t_1^{\frac{p_0p_1}{p_0-p_1}}).\end{aligned}$$

Considerando r tal que

$$\frac{1}{r} = \frac{p_1-p_0}{p_0p_1}\left(\frac{p_0}{p_1-p_0}+\varepsilon\right)$$

e $s = (t_1/t_0)^{\frac{p_0p_1}{p_1-p_0}}$, segue da escolha de ε que

$$\begin{aligned}\frac{1}{r} &= \frac{1}{p_1} - \frac{p_0-p_1}{p_0p_1}\varepsilon\\ &> \frac{1}{p_1} - \frac{p_0-p_1}{p_0p_1}\frac{p_0(q_\Phi-p_1)}{q_\Phi(p_0-p_1)}\\ &= \frac{1}{p_1} - \frac{q_\Phi-p_1}{p_1q_\Phi}\\ &= \frac{1}{p_1}+\frac{1}{q_\Phi}-\frac{1}{p_1} = \frac{1}{q_\Phi}\end{aligned}$$

ou seja $0 < r < q_\Phi$ e $0 < s < 1$. Então por 1.1(3) temos que

$$(7)\qquad \begin{aligned}\frac{\rho(t_1)}{t_1^{1-\varepsilon}} &\le C t_0^{\frac{p_0}{p_1-p_0}+\varepsilon}\Phi^{-1}\left(\left(\frac{t_1}{t_0}\right)^{\frac{p_0p_1}{p_1-p_0}} t_1^{\frac{p_0p_1}{p_0-p_1}}\right)\\ &= C\frac{t_0^{\frac{p_1}{p_1-p_0}}}{t_0^{1-\varepsilon}}\Phi^{-1}(t_0^{\frac{p_0p_1}{p_0-p_1}}) = C\frac{\rho(t_0)}{t_0^{1-\varepsilon}}.\end{aligned}$$

Agora se $0 < t < 1$ e $s > 0$ temos de (6) que

$$\frac{\rho(st)}{(st)^{\varepsilon}} \leq C\frac{\rho(s)}{s^{\varepsilon}}$$

implicando em,

$$\frac{\rho(st)}{\rho(s)} \leq Ct^{\varepsilon} \leq C\max(t^{\varepsilon}, t^{1-\varepsilon}). \tag{8}$$

Analogamente se $t > 1$ e $s > 0$ segue de (7) que

$$\frac{\rho(st)}{(st)^{1-\varepsilon}} \leq C\frac{\rho(s)}{s^{1-\varepsilon}}$$

o que implica em

$$\frac{\rho(st)}{\rho(s)} \leq Ct^{1-\varepsilon} \leq C\max(t^{\varepsilon}, t^{1-\varepsilon}). \tag{9}$$

Desta forma (5) segue de (8) e (9). Agora como $0 < \varepsilon < 1$ temos usando (5) que

$$\lim_{t\to 0}\frac{\overline{\rho}(t)}{\max(1,t)} \leq C\lim_{t\to 0}\frac{\max(t^{\varepsilon}, t^{1-\varepsilon})}{\max(1,t)} \leq C\lim_{t\to 0}\max(t^{\varepsilon}, t^{1-\varepsilon}) = 0 \tag{10}$$

e

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\overline{\rho}(t)}{\max(1,t)} \leq C\lim_{t\to\infty} t\frac{\max(t^{\varepsilon-1}, t^{-\varepsilon})}{\max(1,t)} \leq C\lim_{t\to\infty}\max(t^{\varepsilon-1}, t^{-\varepsilon}) = 0 \tag{11}$$

e então (4) segue de (10) e (11), mostrando que $\rho \in \mathcal{P}^{+-}$.

No que se segue podemos supor sem perda de generalidade que a constante de quase-concavidade do parâmetro funcional ρ é igual a 1. Vamos provar agora que

$$L^{\Phi}_{(w)}(E) \hookrightarrow < L^{p_0}_{(w)}(E), L^{p_1}_{(w)}(E) >_{\rho,p} \tag{12}$$

Notemos inicialmente que considerando $\Phi_k(t) = t^{p_k}$, $k = 0,1$ segue de (2) que

$$\Phi^{-1} = \Phi_0^{-1}\rho\left(\frac{\Phi_1^{-1}}{\Phi_0^{-1}}\right). \tag{13}$$

Então existe uma função contínua h (ver [12]), tal que

$$\Phi(y) = \left(\frac{y}{\rho(h(y))}\right)^{p_0} = \left(\frac{yh(y)}{\rho(h(y))}\right)^{p_1}. \tag{14}$$

Seja $a \in L^{\Phi}_{(w)}(E)$ com $||a||_{L^{\Phi}_{(w)}(E)} \leq 1$, e para cada $n \in \mathbb{Z}$ definimos $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ como no Teorema IV.2.2 onde estamos considerando agora

$$B_n = \{x \in \Omega : ||a(x)w(x)||_E \in h^{-1}([2^{n-1}, 2^n))\}.$$

Assim B_n é μ-mensurável, $\Omega = \cup_{n\in\mathbb{Z}} B_n$ e $B_n \cap B_m = \emptyset$ se $n \neq m$. Segue de (14) que em B_n vale

$$\left(\frac{||a(x)w(x)||_E}{\rho(2^n)}\right)^{p_0} \leq \left(\frac{||a(x)w(x)||_E}{\rho(h(||a(x)w(x)||_E))}\right)^{p_0} = \Phi(||a(x)w(x)||_E) \tag{15}$$

e

$$\left(\frac{2^{n-1}||a(x)w(x)||_E}{\rho(2^{n-1})}\right)^{p_1} \leq \left(\frac{||a(x)w(x)||_E h(||a(x)w(x)||_E)}{\rho(h(||a(x)w(x)||_E))}\right)^{p_1} = \Phi(||a(x)w(x)||_E). \tag{16}$$

Seja $F \subset \mathbb{Z}$ um subconjunto finito qualquer. Então segue de (15) que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega ||\frac{1}{\sum_F \lambda_n}(\sum_F \tilde{r}_n(t)\frac{1}{\rho(2^n)}a_n(x))w(x)||_E^{p_0} d\mu &= \sum_F \int_{B_n} ||\frac{\lambda_n}{\sum_F \lambda_n}\frac{a(x)w(x)}{\rho(2^n)}||_E^{p_0} d\mu \\
&\leq \sum_F \int_{B_n} ||\frac{a(x)w(x)}{\rho(2^n)}||_E^{p_0} d\mu \\
&\leq \int_\Omega \Phi(||a(x)w(x)||_E) d\mu \leq 1.
\end{aligned}$$

Analogamente segue de (16) que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega ||\frac{1}{2\sum_F \lambda_n}(\sum_F \tilde{r}_n(t)\frac{2^n}{\rho(2^n)}a_n(x))w(x)||_E^{p_1} d\mu &\leq \sum_F \int_{B_n} ||\frac{\lambda_n}{\sum_F \lambda_n}\frac{2^{n-1}a(x)w(x)}{\rho(2^{n-1})}||_E^{p_1} d\mu \\
&\leq \sum_F \int_{B_n} ||\frac{2^{n-1}a(x)w(x)}{\rho(2^n)}||_E^{p_1} d\mu \\
&\leq \int_\Omega \Phi(||a(x)w(x)||_E) d\mu \leq 1.
\end{aligned}$$

Logo, concluímos que $a_n \in L^{p_0}_{(w)}(E) \cap L^{p_1}_{(w)}(E)$ e

$$||\sum_F \tilde{r}_n(\cdot)\frac{2^{kn}}{\rho(2^n)}a_n||_{L^p([0,1],L^{p_k}_{(w)}(E))} \leq 2^k \sum_F \lambda_n. \tag{17}$$

Podemos também concluir de (17) que $(\tilde{r}_n(\cdot)2^{kn}a_n/\rho(2^n))_{n\in\mathbb{Z}}$ é $L^p([0,1],L^{p_k}_{(w)}(E))$-somável e

$$\max_{k=0,1}\sup_F ||\sum_F \tilde{r}_n(\cdot)\frac{2^{kn}}{\rho(2^n)}a_n||_{L^p([0,1],L^{p_k}_{(w)}(E))} \leq 2. \tag{18}$$

Agora se $F \subset \mathbb{Z}_-$ é finito, segue de (15) que

$$\int_\Omega \|\frac{1}{\sum_F \lambda_n} \sum_F a_n(x)w(x)\|_E^{p_0} d\mu \leq \sum_F \int_{B_n} \|\frac{a(x)w(x)}{\rho(2^n)}\|_E^{p_0} d\mu \leq 1$$

Do mesmo modo, se $F \subset \mathbb{Z}_+$ é finito segue de (16) que

$$\int_\Omega \|\frac{1}{\sum_F \lambda_n} \sum_F a_n(x)w(x)\|_E^{p_0} d\mu \leq \sum_F \int_{B_n} \|\frac{2^{n-1}a(x)w(x)}{\rho(2^{n-1})}\|_E^{p_0} d\mu \leq 1$$

Então para $k = 0, 1$ temos que

$$\|\sum_F a_n\|_{L^{p_k}_{(w)}(E)} \leq \sum_F \lambda_n$$

o que mostra que $(a_n)_{n \leq 0}$ é somável em $L^{p_0}_{(w)}(E)$ e $(a_n)_{n>0}$ é somável em $L^{p_1}_{(w)}(E)$. Logo, considerando $b_0 = \sum_{n=-\infty}^{0} a_n$ e $b_1 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ temos que $a = b_0 + b_1$ e

$$\|a - \sum_{N_1}^{N_2} a_n\|_{L^{p_0}_{(w)}(E)+L^{p_1}_{(w)}(E)} \leq \|b_0 - \sum_{N_1 \leq n \leq 0} a_n\|_{L^{p_0}_{(w)}(E)} + \|b_1 - \sum_{0<n\leq N_2} a_n\|_{L^{p_1}_{(w)}(E)}$$

mostrando assim que $a = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n$ com convergência em $L^{p_0}_{(w)}(E) + L^{p_1}_{(w)}(E)$. Demonstramos assim que $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ é uma sequência admissível para a, ou seja $a \in < L^{p_0}_{(w)}(E), L^{p_1}_{(w)}(E) >_{\rho,p}$. Além disso segue de (18) que

$$\|a\|_{< L^{p_0}_{(w)}(E), L^{p_1}_{(w)}(E) >_{\rho,p}} \leq 2$$

demonstrando então (12).

Vamos agora demonstrar a inclusão

$$< L^{p_0}_{(w)}(E), L^{p_1}_{(w)}(E) >_{\rho,p} \hookrightarrow L^{\Phi}_{(w)}(E). \tag{19}$$

Seja $a \in < L^{p_0}_{(w)}(E), L^{p_1}_{(w)}(E) >_{\rho,p}$ com $\|a\|_{< L^{p_0}_{(w)}(E), L^{p_1}_{(w)}(E) >_{\rho,p}} < 1$ e $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ uma sequência admissível para a tal que

$$\max_{k=0,1} \sup_F \|\sum_F \tilde{r}_n(\cdot) \frac{2^{kn}}{\rho(2^n)} a_n\|_{L^p([0,1], L^{p_k}_{(w)}(E))} \leq 1 \tag{20}$$

ou, usando a desigualdade de Khintchine-Maurey

$$\max_{k=0,1} \sup_F \|(\sum_F (\frac{2^{kn}}{\rho(2^n)} |a_n|)^2)^{1/2}\|_{L^{p_k}_{(w)}(E)} \leq C \tag{21}$$

Por outro lado como $(\tilde{r}_n(\cdot)2^{kn}a_n/\rho(2^n))_{n\in\mathbb{Z}}$ é $L^p([0,1],L^{p_k}_{(w)}(E))$-somável temos que dado $\varepsilon > 0$, existe $F_\varepsilon \subset \mathbb{Z}$ finito tal que se $F' \subset \mathbb{Z}$ é finito com $F' \cap F_\varepsilon = \emptyset$ então, após usarmos a desigualdade de Khintchine-Maurey temos

$$\| (\sum_{F'} (\frac{2^{kn}}{\rho(2^n)} |a_n|)^2)^{1/2} \|_{L^{p_k}_{(w)}(E)} \le \varepsilon \tag{22}$$

Segue agora da Proposição IV.1.3 (Carlson) que se $F \subset \mathbb{Z}$ é finito então

$$\| \sum_F a_n(x)w(x)\|_E \le CR\left(\|(\sum_F (\frac{1}{\rho(2^n)}|a_n(x)|)^2)^{1/2}w(x)\|_E, \|(\sum_F (\frac{2^n}{\rho(2^n)}|a_n(x)|)^2)^{1/2}w(x)\|_E \right)$$

onde $R(s,t) = s\rho(t/s)$. Consideremos $A_k(x) = \|(\sum_{F'}(\frac{2^{kn}}{\rho(2^n)}|a_n(x)|)^2)^{1/2}w(x)\|_E$ e $A(x) = \max_{k=0,1}(A_k(x)/2\varepsilon)^{p_k}$. Segue de (13) que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2C\varepsilon}\|\sum_{F'} a_n(x)w(x)\|_E &\le R\left(\frac{A_0(x)}{2\varepsilon}, \frac{A_1(x)}{2\varepsilon}\right) \\ &\le R(A(x)^{1/p_0}, A(x)^{1/p_1}) = \Phi^{-1}(A(x)) \end{aligned}$$

e por convexidade

$$\begin{aligned} \Phi\left(\frac{1}{2C\varepsilon}\|\sum_{F'} a_n(x)w(x)\|_E\right) &\le \left(\frac{A_0(x)}{2\varepsilon}\right)^{p_0} + \left(\frac{A_1(x)}{2\varepsilon}\right)^{p_1} \\ &\le \frac{1}{2}\left(\left(\frac{A_0(x)}{\varepsilon}\right)^{p_0} + \left(\frac{A_1(x)}{\varepsilon}\right)^{p_1}\right) \end{aligned} \tag{23}$$

Logo, segue de (22) e (23) que

$$\int_\Omega \Phi\left(\frac{1}{2C\varepsilon}\|\sum_{F'} a_n(x)w(x)\|_E\right) d\mu \le \frac{1}{2}\int_\Omega \left(\left(\frac{A_0(x)}{\varepsilon}\right)^{p_0} + \left(\frac{A_1(x)}{\varepsilon}\right)^{p_1}\right) d\mu \le 1 \tag{24}$$

ou seja $\|\sum_{F'} a_n\|_{L^\Phi_{(w)}(E)} \le 2C\varepsilon$. Assim $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ é somável em $L^\Phi_{(w)}(E)$. Mas por (12) e o Teorema III.2.2 temos que $L^\Phi_{(w)}(E) \hookrightarrow L^{p_0}_{(w)}(E) + L^{p_1}_{(w)}(E)$, e desde que $a = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n$ em $L^{p_0}_{(w)}(E) + L^{p_1}_{(w)}(E)$ segue que $a = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n$ em $L^\Phi_{(w)}(E)$ provando que $a \in L^\Phi_{(w)}(E)$. Agora, repetindo o mesmo processo acima para obter (24), mas usando (21) no lugar de (22), vamos ter que

$$\|\sum_F a_n\|_{L^\Phi_{(w)}(E)} \le C \tag{25}$$

para qualquer $F \subset \mathbb{Z}$ finito. Passando o limite em (25) teremos que $||a||_{L^{\Phi}_{(w)}(E)} \leq C$, o que prova (19) e então o Teorema.

Podemos também formular um "caso limite" para o Teorema 1.2.

1.3. TEOREMA: Sejam Φ uma função de Orlicz que juntamente com sua conjugada satisfaçam a condição-Δ_2, w um peso e E um reticulado de Banach com concavidade finita. Então existe p_0 com $1 < p_0 < \infty$ tal que

$$(1) \qquad < L^{p_0}_{(w)}(E), L^{\infty}_{(w)}(E) >_{\rho,p} = L^{\Phi}_{(w)}(E)$$

com equivalência de normas, onde $1 \leq p \leq \infty$ e

$$(2) \qquad \rho(t) = \begin{cases} t\Phi^{-1}(t^{-p_0}), & t > 0, \\ 0 & t = 0. \end{cases}$$

Demonstração. Segue de I.1.(4) que podemos escolher p_0 com

$$(3) \qquad 1 < p_0 < q_\Phi \leq p_\Phi \leq \infty.$$

Vamos demonstrar inicialmente que $\rho \in \mathcal{P}^{+-}$. Em primeiro lugar provaremos que ρ é quase-concava. Para $0 < t_0 < t_1$ temos que

$$\rho(t_0) = t_0\Phi^{-1}(t_0^{-p_0}) = t_1 \left(\left(\frac{t_0}{t_1}\right)^{p_0}\right)^{\frac{1}{p_0}} \Phi^{-1}(t_0^{-p_0}).$$

e tomando $r = p_0$ e $s = (t_0/t_1)^{p_0}$ segue que $r < q_\Phi$ e $0 < s < 1$. E então usando 1.1(3) temos

$$(4) \qquad \rho(t_0) \leq Ct_1\Phi^{-1}\left(\left(\frac{t_0}{t_1}\right)^{p_0} t_0^{-p_0}\right) = Ct_1\Phi^{-1}(t_1^{-p_0}) = C\rho(t_1).$$

Por outro lado como Φ^{-1} é crescente, temos

$$(5) \qquad \frac{\rho(t_1)}{t_1} = \Phi^{-1}(t_1^{-p_0}) \leq \Phi^{-1}(t_0^{-p_0}) = \frac{\rho(t_0)}{t_0}.$$

Demonstramos assim que ρ é quase-concava. Resta provar que

$$(6) \qquad \overline{\rho}(t) = o(\max(1,t)).$$

Para tanto, seja ε tal que

$$0 < \varepsilon < \min\left(\frac{q_\Phi - p_0}{q_\Phi}, \frac{p_0}{p_\Phi}\right).$$

Segue de (3) que $0 < \varepsilon < 1$. Considerando $0 < t_0 < t_1$ temos por um lado que

$$\frac{\rho(t_0)}{t_0^{\varepsilon}} = t_0^{1-\varepsilon}\Phi^{-1}(t_0^{-p_0}) = t_1^{1-\varepsilon}\left(\left(\frac{t_0}{t_1}\right)^{p_0}\right)^{\frac{1-\varepsilon}{p_0}}\Phi^{-1}(t_0^{-p_0}).$$

e tomando $r = p_0/1-\varepsilon$, $s = (t_0/t_1)^{p_0}$ teremos

$$\begin{aligned}\frac{1}{r} &= \frac{1-\varepsilon}{p_0} > \frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_0}\left(\frac{q_\Phi - p_0}{q_\Phi}\right) = \frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_0}\left(1 - \frac{p_0}{q_\Phi}\right) \\ &= \frac{1}{p_0} + \frac{1}{q_\Phi} - \frac{1}{p_0} = \frac{1}{q_\Phi}\end{aligned}$$

ou seja $r < q_\Phi$ e $0 < s < 1$. Então usando 1.1(3) temos

$$\frac{\rho(t_0)}{t_0^{\varepsilon}} \leq Ct_1^{1-\varepsilon}\Phi^{-1}\left(\left(\frac{t_0}{t_1}\right)^{p_0} t_0^{-p_0}\right) = Ct_1^{1-\varepsilon}\Phi^{-1}(t_1^{-p_0}) = C\frac{\rho(t_1)}{t_1^{\varepsilon}}$$

Por outro lado temos

$$\frac{\rho(t_1)}{t_1^{1-\varepsilon}} = t_1^{\varepsilon}\Phi^{-1}(t_1^{-p_0}) = t_0^{\varepsilon}\left(\left(\frac{t_1}{t_0}\right)^{p_0}\right)^{\frac{\varepsilon}{p_0}}\Phi^{-1}(t_1^{-p_0}).$$

e se tomarmos $r = p_0/\varepsilon$ e $s = (t_1/t_0)^{p_0}$, temos $s > 1$ e

$$\frac{1}{r} = \frac{\varepsilon}{p_0} < \frac{1}{p_\Phi}$$

ou seja $r > p_\Phi$ e usando novamente 1.1(3) concluímos que

$$\frac{\rho(t_1)}{t_1^{1-\varepsilon}} \leq C\frac{\rho(t_0)}{t_0^{1-\varepsilon}}.$$

Como no Teorema 1.2. obtemos (6), mostrando assim que $\rho \in \mathcal{P}^{+-}$.

No que se segue podemos supor sem perda de generalidade que a constante de quase-concavidade do parâmetro funcional ρ vale 1. Vamos provar agora que

$$L^{\Phi}_{(w)}(E) \hookrightarrow < L^{p_0}_{(w)}(E), L^{\infty}_{(w)}(E) >_{\rho,p} \tag{7}$$

Observemos que tomando $\Phi_0(t) = t^{p_0}$, temos

$$\Phi^{-1} = \Phi_0^{-1}\rho\left(\frac{1}{\Phi_0^{-1}}\right). \tag{8}$$

Então existe uma função contínua h (ver [12]), tal que $yh(y) = \rho(h(y))$ e

$$(9) \qquad \Phi(y) = \left(\frac{y}{\rho(h(y))}\right)^{p_0}.$$

Seja $a \in L^{\Phi}_{(w)}(E)$ com $||a||_{L^{\Phi}_{(w)}(E)} \leq 1$, e para cada $n \in \mathbb{Z}$ definimos $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ como anteriormente onde

$$B_n = \{x \in \Omega : ||a(x)w(x)||_E \in h^{-1}([2^{n-1}, 2^n))\}.$$

Assim B_n é μ-mensurável, $\Omega = \cup_{n\in\mathbb{Z}} B_n$ e $B_n \cap B_m = \emptyset$ se $n \neq m$. Segue de (9) que em B_n temos

$$(10) \qquad \left(\frac{||a(x)w(x)||_E}{\rho(2^n)}\right)^{p_0} \leq \left(\frac{||a(x)w(x)||_E}{\rho(h(||a(x)w(x)||_E))}\right)^{p_0} = \Phi(||a(x)w(x)||_E)$$

Seja $F \subset \mathbb{Z}$ um subconjunto finito qualquer. Então segue de (10) que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega ||\frac{1}{\sum_F \lambda_n}(\sum_F \tilde{r}_n(t)\frac{1}{\rho(2^n)}a_n(x))w(x)||_E^{p_0} d\mu &= \sum_F \int_{B_n} ||\frac{\lambda_n}{\sum_F \lambda_n}\frac{a(x)w(x)}{\rho(2^n)}||_E^{p_0} d\mu \\
&\leq \sum_F \int_{B_n} ||\frac{a(x)w(x)}{\rho(2^n)}||_E^{p_0} d\mu \\
&\leq \int_\Omega \Phi(||a(x)w(x)||_E) d\mu \leq 1.
\end{aligned}$$

o que mostra que

$$(11) \qquad ||\sum_F \tilde{r}_n(\cdot)\frac{1}{\rho(2^n)}a_n||_{L^p([0,1],L^{p_0}_{(w)}(E))} \leq \sum_F \lambda_n$$

e então $a_n \in L^{p_0}_{(w)}(E)$ e $(\tilde{r}_n(\cdot)a_n/\rho(2^n))_{n\in\mathbb{Z}}$ é $L^p([0,1], L^{p_0}_{(w)}(E))$-somável. Lembrando agora que $yh(y) = \rho(h(y))$ temos que

$$\begin{aligned}
||\frac{1}{2\sum_F \lambda_n}\sum_F \tilde{r}_n(t)\frac{2^n}{\rho(2^n)}a_n||_{L^\infty_{(w)}(E)} &\leq \max_{n\in F}\sup_{B_n} ||\frac{\lambda_n}{\sum_F \lambda_n}\frac{2^{n-1}a(x)w(x)}{\rho(2^{n-1})}||_E \\
&\leq \max_{n\in F}\sup_{B_n} ||\frac{2^{n-1}a(x)w(x)}{\rho(2^{n-1})}||_E \ , \qquad \mu-\text{a.e.}
\end{aligned}$$

Mas em B_n temos que

$$\frac{2^{n-1}}{\rho(2^{n-1})} \leq \frac{h(||a(x)w(x)||_E)}{\rho(h(||a(x)w(x)||_E))}$$

o que mostra que

(12) $$||\sum_F \tilde{r}_n(\cdot)\frac{2^n}{\rho(2^n)}a_n||_{L^p([0,1],L^\infty_{(w)}(E))} \leq 2\sum_F \lambda_n.$$

Logo $a_n \in L^\infty_{(w)}(E)$ e $(\tilde{r}_n(\cdot)2^n a_n/\rho(2^n))_{n\in\mathbb{Z}}$ é $L^p([0,1],L^\infty_{(w)}(E))$-somável. Podemos também concluir de (11) e (12) que

(13) $$\sup_F ||\sum_F \tilde{r}_n(\cdot)\frac{1}{\rho(2^n)}a_n||_{L^p([0,1],L^{p_0}_{(w)}(E))} \leq 1$$

e

(14) $$\sup_F ||\sum_F \tilde{r}_n(\cdot)\frac{2^n}{\rho(2^n)}a_n||_{L^p([0,1],L^\infty_{(w)}(E))} \leq 2.$$

Tomemos agora $F \subset \mathbb{Z}_-$ finito. Assim segue de (10) que

$$\int_\Omega ||\frac{1}{\sum_F \lambda_n}\sum_F a_n(x)w(x)||_E^{p_0}d\mu \leq \sum_F \int_{B_n} ||\frac{a(x)w(x)}{\rho(2^n)}||_E^{p_0}d\mu \leq 1$$

o que mostra que $(a_n)_{n\leq 0}$ é somável em $L^{p_0}_{(w)}(E)$. Analogamente temos para $F \subset \mathbb{Z}_+$ finito que

$$||\frac{1}{\sum_F \lambda_n}\sum_F a_n||_{L^\infty_{(w)}(E)} \leq \max_{n\in F}\sup_{B_n}||\frac{2^{n-1}a(x)w(x)}{\rho(2^{n-1})}||_E \leq 1 \quad \mu-\text{a.e.}$$

e então $(a_n)_{n>0}$ é somável em $L^\infty_{(w)}(E)$. Logo, considerando $b_0 = \sum_{n=-\infty}^0 a_n$ e $b_1 = \sum_{n=1}^\infty a_n$ temos que $a = b_0 + b_1$ e

$$||a - \sum_{N_1}^{N_2} a_n||_{L^{p_0}_{(w)}(E)+L^\infty_{(w)}(E)} \leq ||b_0 - \sum_{N_1\leq n\leq 0} a_n||_{L^{p_0}_{(w)}(E)} + ||b_1 - \sum_{0<n\leq N_2} a_n||_{L^\infty_{(w)}(E)}$$

mostrando assim que $a = \sum_{n=-\infty}^\infty a_n$ com convergência em $L^{p_0}_{(w)}(E) + L^\infty_{(w)}(E)$. Tudo isto nos leva a concluir que $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ é uma sequência admissível para a, e consequentemente $a \in < L^{p_0}_{(w)}(E), L^{p_1}_{(w)}(E) >_{\rho,p}$. Além disso segue de (13) e (14) que

$$||a||_{<L^{p_0}_{(w)}(E),L^\infty_{(w)}(E)>_{\rho,p}} \leq 2$$

provando então (7).

Vamos agora demonstrar a inclusão

(15) $$< L^{p_0}_{(w)}(E), L^\infty_{(w)}(E) >_{\rho,p} \hookrightarrow L^\Phi_{(w)}(E).$$

Seja $a \in < L^{p_0}_{(w)}(E), L^\infty_{(w)}(E) >_{\rho,p}$ com $||a||_{<L^{p_0}_{(w)}(E),L^\infty_{(w)}(E)>_{\rho,p}} < 1$ e $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ uma sequência admissível para a tal que

$$\sup_F \|\sum_F \tilde{r}_n(\cdot)\frac{1}{\rho(2^n)}a_n\|_{L^p([0,1],L^{p_0}_{(w)}(E))} \leq 1. \tag{16}$$

e

$$\sup_F \|\sum_F \tilde{r}_n(\cdot)\frac{2^n}{\rho(2^n)}a_n\|_{L^p([0,1],L^{\infty}_{(w)}(E))} \leq 1. \tag{17}$$

ou, usando a desigualdade de Khintchine-Maurey para E,

$$\sup_F \|(\sum_F(\frac{1}{\rho(2^n)}|a_n|)^2)^{1/2}\|_{L^{p_0}_{(w)}(E)} \leq C \tag{18}$$

e

$$\sup_F \|(\sum_F(\frac{2^n}{\rho(2^n)}|a_n|)^2)^{1/2}\|_{L^{\infty}_{(w)}(E)} \leq C \tag{19}$$

Segue de (19) que se $F \subset \mathbb{Z}$ é finito então

$$\|(\sum_F(\frac{2^n}{\rho(2^n)}|a_n(x)|)^2)^{1/2}w(x)\|_E \leq C \quad , \quad \mu - \text{a.e.} \tag{20}$$

Agora, levando em conta que $(\tilde{r}_n(\cdot)a_n/\rho(2^n))_{n\in\mathbb{Z}}$ e $(\tilde{r}_n(\cdot)2^n a_n/\rho(2^n))_{n\in\mathbb{Z}}$ são somáveis em $L^p([0,1],L^{p_0}_{(w)}(E))$ e $L^p([0,1],L^{\infty}_{(w)}(E))$ respectivamente, segue que dado $\varepsilon > 0$, existe $F_\varepsilon \subset \mathbb{Z}$ finito tal que se $F' \subset \mathbb{Z}$ é finito com $F' \cap F_\varepsilon = \emptyset$ então, após usarmos a desigualdade de Khintchine-Maurey temos

$$\|(\sum_{F'}(\frac{2^{kn}}{\rho(2^n)}|a_n|)^2)^{1/2}\|_{L^{p_0}_{(w)}(E)} \leq \varepsilon \tag{21}$$

e

$$\|(\sum_{F'}(\frac{2^n}{\rho(2^n)}|a_n|)^2)^{1/2}\|_{L^{\infty}_{(w)}(E)} \leq \varepsilon \tag{22}$$

Temos que (22) implica em

$$\|(\sum_{F'}(\frac{2^n}{\rho(2^n)}|a_n(x)|)^2)^{1/2}w(x)\|_{L^{\infty}_{(w)}(E)} \leq \varepsilon \quad , \quad \mu - \text{a.e.} \tag{23}$$

Segue agora da Proposição IV.1.3 (Carlson) que se $F \subset \mathbb{Z}$ é finito então

$$\begin{aligned} \|\sum_F a_n(x)w(x)\|_E &\leq \\ &\leq CR\left(\|(\sum_F(\frac{1}{\rho(2^n)}|a_n(x)|)^2)^{1/2}w(x)\|_E, \|(\sum_F(\frac{2^n}{\rho(2^n)}|a_n(x)|)^2)^{1/2}w(x)\|_E\right) \end{aligned} \tag{24}$$

onde $R(s,t) = s\rho(t/s)$. Notemos agora que $\rho(Ct) \leq C\rho(t)$ para $C > 1$ (pois $\rho(t)/t$ é decrescente). Assim usando (20) e (24) temos

$$(25) \qquad \|\sum_F a_n(x)w(x)\|_E \leq CR(\|(\sum_F(\frac{1}{\rho(2^n)}|a_n(x)|)^2)^{1/2}w(x)\|_E, 1)$$

Seja $A_0(x) = (\frac{1}{\varepsilon}\|(\sum_{F'}(\frac{1}{\rho(2^n)}|a_n(x)|)^2)^{1/2}w(x)\|_E)^{p_0}$. Segue de (8) e (23) que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{C}\|\sum_{F'} a_n(x)w(x)\|_E &\leq R(\varepsilon(A_0(x))^{1/p_0}, \|(\sum_{F'}(\frac{2^n}{\rho(2^n)}|a_n(x)|)^2)^{1/2}w(x)\|_E) \\
&\leq R(\varepsilon(A_0(x))^{1/p_0}, \varepsilon) \\
&\leq \varepsilon R((A_0(x))^{1/p_0}, 1) \\
&= \varepsilon\Phi^{-1}(A_0(x)) \quad , \quad \mu - \text{a.e.}
\end{aligned}$$

e então usando (21),

$$(26) \quad \begin{aligned}
\int_\Omega \Phi\left(\frac{1}{C\varepsilon}\|\sum_{F'} a_n(x)w(x)\|_E\right) d\mu &\leq \int_\Omega \left(\frac{1}{\varepsilon}\|(\sum_{F'}(\frac{|a_n(x)|}{\rho(2^n)})^2)^{1/2}w(x)\|_E\right)^{p_0} d\mu \\
&\leq 1
\end{aligned}$$

ou seja $\|\sum_{F'} a_n\|_{L^\Phi_{(w)}(E)} \leq C\varepsilon$. Agora fazendo uso de (25) a conclusão do Teorema se procede exatamente como no Teorema 1.2.

2. CONSEQUÊNCIAS

Como consequência do Teorema 1.2, usando os Teoremas III.2.3 e IV.2.1 veremos que os espaços $L^\Phi_{(w)}$ reflexivos têm a propriedade U.M.D.(Unconditional Martingale Differences). Para detalhes sobre a propriedade U.M.D. sugerimos os artigos de D.L.Burkholder([3]) e J.Bourgain([2]). Uma caracterização bastante útil é que um espaço de Banach E tem a propriedade U.M.D. se e somente se a transformada de Hilbert tem uma extensão contínua $\mathcal{H}$ de $L^p(\mathbb{R}, E)$ em $L^p(\mathbb{R}, E)$, $1 < p < \infty$. São fatos conhecidos que os espaços $L^p_{(w)}$ (onde o peso não atrapalha em nada) têm a propriedade U.M.D. ([25]).

2.1. TEOREMA: Seja Φ uma função de Orlicz que juntamente com sua conjugada satisfaçam a condição-Δ_2 e w um peso. Então $L^\Phi_{(w)}$ tem a propriedade U.M.D.

Demonstração. Segue do Teorema 1.2 (com $E = \mathbb{R}$) que existem p_0, p_1 com $1 < p_0, p_1 < \infty$ e $\rho \in \mathcal{P}^{+-}$ tais que

$$(1) \qquad < L^{p_0}_{(w)}, L^{p_1}_{(w)} >_{\rho,p} = L^\Phi_{(w)}$$

Mas como $L^p_{(w)}$, $1 < p < \infty$, tem a propriedade U.M.D. segue que a transformada de Hilbert tem uma extensão contínua

$$\mathcal{H} : L^p(L^{p_k}_{(w)}) \longrightarrow L^p(L^{p_k}_{(w)})$$

para $k = 0,1$ e $1 < p < \infty$. Então aplicando o Teorema III.2.3 temos que

$$\mathcal{H} : < L^p(L^{p_0}_{(w)}), L^p(L^{p_1}_{(w)}) >_{\rho,p} \longrightarrow < L^p(L^{p_0}_{(w)}), L^p(L^{p_1}_{(w)}) >_{\rho,p} \tag{2}$$

Porém segue do Teorema IV.2.1 que

$$< L^p(L^{p_0}_{(w)}), L^p(L^{p_1}_{(w)}) >_{\rho,p} = L^p(< L^{p_0}_{(w)}, L^{p_1}_{(w)} >_{\rho,p}) \tag{3}$$

e então usando (1), (2) e (3) temos finalmente que

$$\mathcal{H} : L^p(L^{\Phi}_{(w)}) \longrightarrow L^p(L^{\Phi}_{(w)})$$

ou seja $L^{\Phi}_{(w)}$ tem a propriedade U.M.D.

2.2. COROLÁRIO: Se Φ é uma função de Orlicz que juntamente com sua conjugada satisfaçam a condição-Δ_2 e w é um peso, então $L^{\Phi}_{(w)}$ é p-convexo e q-concavo para certos $1 < p \leq q < \infty$

Demonstração. Segue de [25] e do Teorema 2.1.

2.3. COROLÁRIO: Seja Φ uma função de Orlicz que juntamente com sua conjugada satisfaçam a condição-Δ_2 e w um peso. Se E é um reticulado de Banach de cotipo finito então $L^{\Phi}_{(w)}(E)$ tem concavidade finita.

Demonstração. Igual à da Proposição IV.1.8.

CAPÍTULO VI

INTERPOLAÇÃO DE ESPAÇOS DE ORLICZ COM PESO

Neste capítulo demonstraremos os teoremas de interpolação envolvendo os espaços de Orlicz com peso e a valores vetoriais. O primeiro resultado é um teorema de comutação dos espaços de Orlicz com o método $< \, , >_{\rho,p}$. A seguir demonstraremos outros teoremas onde variaremos os parâmetros envolvidos na definição de $L^{\Phi}_{(w)}(E)$, destacando os casos onde $\rho(t) = t^{\theta}$ e os casos limites.

Em [12], J.Gustavsson e J.Peetre demonstraram um teorema de interpolação para espaços de Orlicz, onde era exigido a condição- Δ_2 para as funções de Orlicz envolvidas, e o caso tratado era o escalar. Em nossos resultados, conseguimos eliminar a condição-Δ_2 e tratamos do caso de funções vetoriais.

1. INTERPOLAÇÃO DOS ESPAÇOS $L^{\Phi}_{(w)}(E)$. CASO GERAL

O próximo resultado será necessário para alguns dos outros que o sucedem.

1.1. LEMA: Se $\rho \in \mathcal{P}^{+-}$ é concava e Φ_0, Φ_1 são funções de Orlicz então Φ definida por

$$\Phi^{-1} = \Phi_0^{-1}\rho\left(\frac{\Phi_1^{-1}}{\Phi_0^{-1}}\right) \tag{1}$$

também é uma função de Orlicz. Além disso, se Φ_0 e Φ_1 satisfazem a condição-Δ_2 então Φ também satisfaz tal condição.

Demonstração. Notemos inicialmente que Φ é contínua, e como $\rho \in \mathcal{P}^{+-}$ segue que $R(s,t) = s\rho(t/s)$ é não-decrescente em cada variável e assim concluímos da relação (1) que Φ é não-decrescente. Por outro lado segue do Lema III.1.2 que R é concava e como Φ_k, $k = 0, 1$ são funções de Orlicz segue que Φ_k^{-1} são concavas. Consideremos agora $\alpha + \beta = 1$, $\alpha, \beta \geq 0$ e $s, t \geq 0$. Então

$$\begin{aligned}
\Phi^{-1}(\alpha s + \beta t) &= R(\Phi_0^{-1}(\alpha s + \beta t), \Phi_1^{-1}(\alpha s + \beta t)) \\
&\geq R(\alpha\Phi_0^{-1}(s) + \beta\Phi_0^{-1}(t), \alpha\Phi_1^{-1}(s) + \beta\Phi_1^{-1}(t)) \\
&= R(\alpha(\Phi_0^{-1}(s), \Phi_1^{-1}(s)) + \beta(\Phi_0^{-1}(t), \Phi_0^{-1}(t)))
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\geq \alpha R(\Phi_0^{-1}(s),\Phi_1^{-1}(s))+\beta R(\Phi_0^{-1}(t),\Phi_1^{-1}(t))\\
&= \alpha\Phi^{-1}(s)+\beta\Phi^{-1}(t),
\end{aligned}
$$

o que mostra que Φ é convexa. Logo Φ é uma função de Orlicz.

Suponhamos agora que Φ_k, $k=0,1$ satisfaçam a condição- Δ_2, isto é,

$$\Phi_k(2t)\leq C\Phi_k(t) \tag{2}$$

ou equivalentemente

$$2\Phi_k^{-1}(t)\leq \Phi_k^{-1}(Ct). \tag{3}$$

Desta forma segue de (3) e da homogeneidade de R que

$$
\begin{aligned}
2\Phi^{-1}(t) &= 2R(\Phi_0^{-1}(t),\Phi_1^{-1}(t)) = R(2\Phi_0^{-1}(t),2\Phi_1^{-1}(t))\\
&\leq R(\Phi_0^{-1}(Ct),\Phi_1^{-1}(Ct)) = \Phi^{-1}(Ct)
\end{aligned}
$$

mostrando que Φ satisfaz a condição-Δ_2.

Vamos agora ao teorema de comutação.

1.2. TEOREMA: Sejam (E_0,E_1) um par de Banach constituído de reticulados de Banach com concavidade finita e w um peso. Se Φ é uma função de Orlicz que juntamente com sua conjugada satisfazem a condição-Δ_2 e $1\leq p\leq\infty$ então

$$< L^{\Phi}_{(w)}(E_0), L^{\Phi}_{(w)}(E_1)>_{\rho,p} = L^{\Phi}_{(w)}(< E_0,E_1>_{\rho,p}) \tag{1}$$

com equivalência de normas.

Demonstração. Seja $a\in L^{\Phi}_{(w)}(< E_0,E_1>_{\rho,p})$ uma função tal que $||a||_{L^{\Phi}_{(w)}(<E_0,E_1>_{\rho,p})}\leq 1$, isto é,

$$\int_\Omega \Phi(||a||_{<E_0,E_1>_{\rho,p}})d\mu\leq 1. \tag{2}$$

Suponhamos também que aw é simples a valores em $< E_0,E_1>_{\rho,p}$, isto é,

$$aw=\sum_{j=1}^{N} a_j\chi_{B_j}$$

onde $a_j\in< E_0,E_1>_{\rho,p}$. Para cada $j=1,\cdots,N$ seja $(a_n^j)_{n\in\mathbb{Z}}$ uma sequência admissível para a_j tal que

$$(3) \qquad \max_{k=0,1} \sup_F \| \sum_F \tilde{r}_n(\cdot) \frac{2^{kn}}{\rho(2^n)} a_n^j \|_{L^p([0,1],E_k)} \leq 2 \|a_j\|_{<E_0,E_1>_{\rho,p}},$$

ou usando a desigualdade de Khintchine-Maurey

$$(4) \qquad \max_{k=0,1} \sup_F \| (\sum_F (\frac{2^{kn}}{\rho(2^n)} |a_n^j|)^2)^{1/2} \|_{E_k} \leq C \|a_j\|_{<E_0,E_1>_{\rho,p}}.$$

Para cada $n \in \mathbb{Z}$ seja a_n definida por

$$a_n(x)w(x) = \begin{cases} a_n^j & \text{se } x \in B_j \ , \ j = 1, \cdots N, \\ 0 & \text{se } x \notin \cup B_j. \end{cases}$$

Seja $F \subset \mathbb{Z}$ um conjunto finito qualquer. Segue de (2) e (4) que

$$\begin{aligned} \int_\Omega \Phi \left(\frac{1}{C} \| (\sum_F (\frac{2^{kn}}{\rho(2^n)} |a_n(x)|)^2)^{1/2} w(x) \|_{E_k} \right) d\mu &= \\ = \sum_{j=1}^N \int_{B_j} \Phi \left(\frac{1}{C} \| (\sum_F (\frac{2^{kn}}{\rho(2^n)} |a_n^j|)^2)^{1/2} \|_{E_k} \right) d\mu & \\ = \sum_{j=1}^N \int_{B_j} \Phi(\|a_j\|_{<E_0,E_1>_{\rho,p}}) d\mu & \\ = \int_\Omega \Phi(\|a(x)w(x)\|_{<E_0,E_1>_{\rho,p}}) d\mu \leq 1 & \end{aligned}$$

e então

$$(5) \qquad \| (\sum_F (\frac{2^{kn}}{\rho(2^n)} |a_n|)^2)^{1/2} \|_{L^\Phi_{(w)}(E_k)} \leq C.$$

Mas segue do Corolário V.2.3 que $L^\Phi_{(w)}(E_k)$, $k = 0, 1$, tem concavidade finita, e então usando a desigualdade de Khintchine-Maurey para $L^\Phi_{(w)}(E_k)$, temos de (5) que

$$(6) \qquad \max_{k=0,1} \sup_F \| \sum_F \tilde{r}_n(\cdot) \frac{2^{kn}}{\rho(2^n)} a_n \|_{L^p([0,1],L^\Phi_{(w)}(E_k))} \leq C.$$

Logo, (6) nos mostra que $a_n \in L^\Phi_{(w)}(E_0) \cap L^\Phi_{(w)}(E_1)$.

Agora, como $(\tilde{r}_n(\cdot) 2^{kn} a_n^j / \rho(2^n))_{n \in \mathbb{Z}}$ é (absolutamente) somável em $L^p([0,1], E_k)$ segue que dado $\varepsilon > 0$, existem $F_\varepsilon^j \subset \mathbb{Z}$ finitos, $j = 1, \cdots, N$ tais que se $F' \cap F_\varepsilon^j = \emptyset$ com $F' \subset \mathbb{Z}$ finito então

$$(7) \qquad \sum_{F'} \| \tilde{r}_n(\cdot) \frac{2^{kn}}{\rho(2^n)} a_n^j \|_{L^p([0,1],E_k)} = \sum_{F'} \| \frac{2^{kn}}{\rho(2^n)} a_n^j \|_{E_k} \leq \varepsilon \|a_j\|_{<E_0,E_1>_{\rho,p}}.$$

Consideremos então $F_\varepsilon = \cup_{j=1}^N F_\varepsilon^j$ e $F' \subset \mathbb{Z}$ finito tal que $F' \cap F_\varepsilon = \emptyset$. Assim $F' \cap F_\varepsilon^j = \emptyset$ para cada $j = 1, \cdots, N$ e usando (2) e (7)

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \Phi\left(\frac{1}{\varepsilon}\|(\sum_{F'} \tilde{r}_n(t)\frac{2^{kn}}{\rho(2^n)}a_n(x))w(x)\|_{E_k}\right)d\mu &\leq \sum_{j=1}^N \int_{B_j} \Phi\left(\frac{1}{\varepsilon}\|\sum_{F'}\frac{2^{kn}}{\rho(2^n)}a_n^j\|_{E_k}\right)d\mu \\
&\leq \sum_{j=1}^N \int_{B_j} \Phi(\|a_j\|_{<E_0,E_1>_{\rho,p}})d\mu \\
&= \int_\Omega \Phi(\|a_j\|_{<E_0,E_1>_{\rho,p}})d\mu \leq 1
\end{aligned}$$

e então

$$\|\sum_{F'} \tilde{r}_n(t)\frac{2^{kn}}{\rho(2^n)}a_n\|_{L^p([0,1],L^\Phi_{(w)}(E_k))} \leq \varepsilon$$

o que mostra que $(\tilde{r}_n(t)2^{kn}a_n/\rho(2^n))_{n\in\mathbb{Z}}$ é somável em $L^p([0,1], L^\Phi_{(w)}(E_k))$. O Lema III.1.7 nos dá que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \min\left(\rho(2^n), \frac{\rho(2^n)}{2^n}\right) < \infty.$$

Logo dado $\varepsilon > 0$, existem $F_\varepsilon^0 \subset \mathbb{Z}_-$ e $F_\varepsilon^1 \subset \mathbb{Z}_+$ finitos tais que se $F_0' \subset \mathbb{Z}_-$ e $F_1' \subset \mathbb{Z}_+$ são finitos com $F_k' \cap F_\varepsilon^k = \emptyset$, $k = 0, 1$, então

$$\sum_{F_k'} \frac{\rho(2^n)}{2^{kn}} < \varepsilon. \tag{8}$$

Segue de (2), (3) e (8) que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \Phi\left(\frac{1}{2\varepsilon}\|\sum_{F_k'} a_n(x)w(x)\|_{E_k}\right)d\mu &= \sum_{j=1}^N \int_{B_j} \Phi\left(\frac{1}{2\varepsilon}\|\sum_{F_k'} a_n^j\|_{E_k}\right)d\mu \\
&\leq \sum_{j=1}^N \int_{B_j} \Phi\left(\frac{1}{2\varepsilon}\sum_{F_k'}\frac{\rho(2^n)}{2^{kn}}\|\frac{2^{kn}}{\rho(2^n)}a_n^j\|_{E_k}\right)d\mu \\
&\leq \sum_{j=1}^N \int_{B_j} \Phi(\|a_j\|_{<E_0,E_1>_{\rho,p}})d\mu \\
&\leq \int_\Omega \Phi(\|a(x)w(x)\|_{<E_0,E_1>_{\rho,p}})d\mu \leq 1
\end{aligned}$$

e então $||\sum_{F'_k} a_n||_{L^{\Phi}_{(w)}(E_k)} \leq 2\varepsilon$, donde concluímos que $(a_n)_{n<0}$ é $L^{\Phi}_{(w)}(E_0)$-somável e $(a_n)_{n\geq 0}$ é $L^{\Phi}_{(w)}(E_1)$-somável. Agora a prova de que $a = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n$ com convergência em $L^{\Phi}_{(w)}(E_0) + L^{\Phi}_{(w)}(E_1)$ é feita de maneira análoga ao Teorema IV.2.1. Assim $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ é uma sequência admissível para a e segue de (6) que

$$||a||_{<L^{\Phi}_{(w)}(E_0),L^{\Phi}_{(w)}(E_1)>_{\rho,p}} \leq C$$

e pelo mesmo argumento de densidade usado no Teorema IV.2.1 concluímos que

$$L^{\Phi}_{(w)}(< E_0, E_1 >_{\rho,p}) \hookrightarrow < L^{\Phi}_{(w)}(E_0), L^{\Phi}_{(w)}(E_1) >_{\rho,p} .$$

Consideremos agora $a \in < L^{\Phi}_{(w)}(E_0), L^{\Phi}_{(w)}(E_1) >_{\rho,p}$ com $||a||_{<L^{\Phi}_{(w)}(E_0),L^{\Phi}_{(w)}(E_1)>_{\rho,p}} < 1$ e $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ uma sequência admissível para a tal que

$$\max_{k=0,1} \sup_F ||\sum_F \tilde{r}_n(\cdot)\frac{2^{kn}}{\rho(2^n)}a_n||_{L^p([0,1],L^{\Phi}_{(w)}(E_k))} \leq 1 \tag{9}$$

Repetindo argumentos do Teorema IV.2.1 temos para $F \subset \mathbb{Z}$ finito que

$$||\sum_F a_n(x)||_{<E_0,E_1>_{\rho,p}} \leq C \max_{k=0,1} ||\sum_F \tilde{r}_n(\cdot)\frac{2^{kn}}{\rho(2^n)}a_n(x)||_{L^p([0,1],E_k)}$$

assim

$$||\,||\sum_F a_n||_{<E_0,E_1>_{\rho,p}}||_{L^{\Phi}_{(w)}} \leq C \max_{k=0,1} ||\,||\sum_F \tilde{r}_n(\cdot)\frac{2^{kn}}{\rho(2^n)}a_n||_{L^p([0,1],E_k)}||_{L^{\Phi}_{(w)}}.$$

Mas, utilizando o Lema III.2.4 (Kahane), temos

$$\begin{aligned}
&||\,||\sum_F \tilde{r}_n(\cdot)\frac{2^{kn}}{\rho(2^n)}a_n||_{L^p([0,1],E_k)}||_{L^{\Phi}_{(w)}} \leq \\
&\leq C||\,||\sum_F \tilde{r}_n(\cdot)\frac{2^{kn}}{\rho(2^n)}a_n||_{L^1([0,1],E_k)}||_{L^{\Phi}_{(w)}} \\
&= C||\int_0^1 ||\sum_F \tilde{r}_n(t)\frac{2^{kn}}{\rho(2^n)}a_n||_{E_k}dt||_{L^{\Phi}_{(w)}} \\
&\leq C\int_0^1 ||\,||\sum_F \tilde{r}_n(t)\frac{2^{kn}}{\rho(2^n)}a_n||_{E_k}||_{L^{\Phi}_{(w)}}dt \\
&= C\int_0^1 ||\sum_F \tilde{r}_n(t)\frac{2^{kn}}{\rho(2^n)}a_n||_{L^{\Phi}_{(w)}(E_k)}dt \\
&\leq ||\sum_F \tilde{r}_n(\cdot)\frac{2^{kn}}{\rho(2^n)}a_n||_{L^p([0,1],L^{\Phi}_{(w)}(E_k))}
\end{aligned}$$

e então,

$$(10) \qquad ||\sum_F a_n||_{L^\Phi_{(w)}(<E_0,E_1>_{\rho,p})} \le C \max_{k=0,1} ||\sum_F \tilde{r}_n(\cdot)\frac{2^{kn}}{\rho(2^n)}a_n||_{L^p([0,1],L^\Phi_{(w)}(E_k))}.$$

Finalmente como $(\tilde{r}_n(\cdot)2^{kn}a_n/\rho(2^n))_{n\in\mathbb{Z}}$ é somável em $L^p([0,1],L^\Phi_{(w)}(E_k))$ segue de (10) que $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ é somável em $L^\Phi_{(w)}(<E_0,E_1>_{\rho,p})$. Assim segue da primeira inclusão e do Teorema III.2.2(1) que $a=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n$ em $L^\Phi_{(w)}(<E_0,E_1>_{\rho,p})$. Além disso, segue de (9) e (10) que

$$||\sum_F a_n||_{L^\Phi_{(w)}(<E_0,E_1>_{\rho,p})} \le C$$

e após passagem ao limite obtemos que

$$||a||_{L^\Phi_{(w)}(<E_0,E_1>_{\rho,p})} \le C.$$

Fica então terminada a demonstração do Teorema.

1.3. TEOREMA: Sejam Φ uma função de Orlicz, E um reticulado de Banach com concavidade finita, w_0, w_1 dois pesos e $1 \le p \le \infty$. Se

$$(1) \qquad w = w_0/\rho(w_0/w_1)$$

então

$$(2) \qquad < L^\Phi_{(w_0)}(E), L^\Phi_{(w_1)}(E) >_{\rho,p} = L^\Phi_{(w)}(E).$$

com equivalência de normas.

Demonstração. Seja $a \in L^\Phi_{(w)}(E)$ com $||a||_{L^\Phi_{(w)}(E)} \le 1$, ou seja

$$(3) \qquad \int_\Omega \Phi(||a(x)w(x)||_E)d\mu \le 1.$$

Consideremos $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ como no Teorema IV.2.2 onde

$$B_n = \{x \in \Omega : \frac{w_0(x)}{w_1(x)} \in [2^{n-1}, 2^n)\}.$$

Então $\Omega = \cup_{n\in\mathbb{Z}} B_n$ e $B_n \cap B_m = \emptyset$ se $n \ne m$. Verifiquemos que $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ é uma sequência admissível para a. Temos que em B_n vale

$$(4) \frac{1}{\rho(2^n)} \le \frac{1}{\rho(w_0(x)/w_1(x))} = \frac{w(x)}{w_0(x)} \quad \text{e} \quad \frac{2^{n-1}}{\rho(2^{n-1})} \le \frac{w_0(x)}{w_1(x)\rho(w_0(x)/w_1(x))} = \frac{w(x)}{w_1(x)}.$$

Seja $F \subset \mathbb{Z}$ um suconjunto finito qualquer. Então, para $k = 0, 1$, usando (3) e (4) temos

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \Phi\left(\frac{1}{2^k \sum_F \lambda_n} \|\left(\sum_F \tilde{r}_n(t) \frac{2^{kn}}{\rho(2^n)} a_n(x)\right) w_k(x)\|_E\right) d\mu = \\
&= \sum_{n \in F} \int_{B_n} \Phi\left(\frac{1}{2^k \sum_F \lambda_n} \|\left(\lambda_n \frac{2^{kn}}{\rho(2^n)} a(x)\right) w_k(x)\|_E\right) d\mu \\
&\leq \sum_{n \in F} \int_{B_n} \Phi\left(\|\frac{2^{k(n-1)}}{\rho(2^{n-k})} a(x) w_k(x)\|_E\right) d\mu \\
&\leq \int_\Omega \Phi(\|a(x)w(x)\|_E) d\mu \leq 1
\end{aligned}$$

e então

$$\|\sum_F \tilde{r}_n(\cdot) \frac{2^{kn}}{\rho(2^n)} a_n\|_{L^p([0,1], L^\Phi_{(w_k)}(E))} \leq 2^k \sum_F \lambda_n. \tag{5}$$

De (5) podemos concluir que $a_n \in L^\Phi_{(w_0)}(E) \cap L^\Phi_{(w_1)}(E)$, $(\tilde{r}_n(\cdot) 2^{kn} a_n / \rho(2^n))_{n \in \mathbb{Z}}$ é $L^p([0,1], L^\Phi_{(w_k)}(E))$-somável, $k = 0, 1$, e

$$\max_{k=0,1} \sup_F \|\sum_F \tilde{r}_n(\cdot) \frac{2^{kn}}{\rho(2^n)} a_n\|_{L^p([0,1], L^\Phi_{(w_k)}(E))} \leq 2. \tag{6}$$

Consideremos agora $F_0 \subset \mathbb{Z}_-$ e $F_1 \subset \mathbb{Z}_+$ dois subconjuntos finitos quaisquer. Então, usando (3) e (4) temos

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \Phi\left(\frac{1}{2^k \sum_{F_k} \lambda_n} \|\sum_{F_k} a_n(x) w_k(x)\|_E\right) d\mu = \\
&= \sum_{n \in F_k} \int_{B_n} \Phi\left(\frac{1}{2^k \sum_{F_k} \lambda_n} \|\lambda_n a(x) w_k(x)\|_E\right) d\mu \\
&\leq \sum_{n \in F_k} \int_{B_n} \Phi\left(\|\frac{2^{k(n-1)}}{\rho(2^{n-k})} a(x) w_k(x)\|_E\right) d\mu \\
&\leq \int_\Omega \Phi(\|a(x)w(x)\|_E) d\mu \leq 1
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\|\sum_{F_k} a_n\|_{L^\Phi_{(w_k)}(E)} \leq 2^k \sum_{F_k} \lambda_n$$

o que mostra que $(a_n)_{n<0}$ é $L^{\Phi}_{(w_0)}(E)$-somável e $(a_n)_{n\geq 0}$ é $L^{\Phi}_{(w_1)}(E)$-somável. Como no Teorema IV.2.2 concluímos que $a = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n$ com convergência em $L^{\Phi}_{(w_0)}(E) + L^{\Phi}_{(w_1)}(E)$. E então $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ é uma sequência admissível para a e segue de (6) que

$$||a||_{<L^{\Phi}_{(w_0)}(E), L^{\Phi}_{(w_1)}(E)>_{\rho,p}} \leq 2$$

provando que

$$L^{\Phi}_{(w)}(E) \hookrightarrow < L^{\Phi}_{(w_0)}(E), L^{\Phi}_{(w_1)}(E) >_{\rho,p} .$$

Consideremos agora $a \in < L^{p}_{(w_0)}(E), L^{p}_{(w_1)}(E) >_{\rho,p}$ com $||a||_{L^{p}_{(w_0)}(E), L^{p}_{(w_1)}(E)>_{\rho,p}} < 1$ e $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ uma sequência admissível para a tal que

$$\max_{k=0,1} \sup_{F} || \sum_{F} \tilde{r}_n(\cdot) \frac{2^{kn}}{\rho(2^n)} a_n ||_{L^p([0,1], L^{\Phi}_{(w_k)}(E))} \leq 1. \tag{7}$$

Segue da Proposição IV.1.3 (Carlson) que

$$|| \sum_{F} a_n(x) w(x) ||_E \leq CR(A_0(x), A_1(x)) w(x)$$

onde $A_k(x) = (\sum_F (2^{kn}|a_n(x)|/\rho(2^n))^2)^{1/2}$. Logo,

$$\begin{aligned} || \sum_{F} a_n(x) w(x) ||_E &\leq CR(\frac{A_0(x)w_0(x)}{w_0(x)}, \frac{A_1(x)w_1(x)}{w_1(x)}) w(x) \\ &\leq C \max_{k=0,1} ||A_k(x) w_k(x)||_E R(\frac{1}{w_0(x)}, \frac{1}{w_1(x)}) w(x) \\ &= C \max_{k=0,1} ||A_k(x) w_k(x)||_E \end{aligned}$$

e usando a desigualdade de Khintchine-Maurey para E temos

$$\begin{aligned} || \sum_{F} a_n ||_{L^{\Phi}_{(w)}(E)} &\leq C \max_{k=0,1} ||(\sum_{F} (\frac{2^{kn}}{\rho(2^n)} |a_n|)^2)^{1/2} ||_{L^{\Phi}_{(w_k)}(E)} \\ &\leq C \max_{k=0,1} || \sum_{F} \tilde{r}_n(\cdot) \frac{2^{kn}}{\rho(2^n)} a_n ||_{L^p([0,1], L^{\Phi}_{(w_k)}(E))}. \end{aligned} \tag{8}$$

Como $(\tilde{r}_n(\cdot) 2^{kn} a_n / \rho(2^n))_{n\in\mathbb{Z}}$ é $L^p([0,1], L^{\Phi}_{(w_k)}(E))$-somável segue de (8) que $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ é somável em $L^{\Phi}_{(w)}(E)$. Usando a primeira inclusão e o Teorema III.2.2, concluímos que $a = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n$ em $L^{\Phi}_{(w)}(E)$. Além disso, usando (7) e (8) temos

$$\|\sum_F a_n\|_{L^{\Phi}_{(w)}(E)} \leq C$$

donde passando o limite concluímos que $\|a\|_{L^{\Phi}_{(w)}(E)} \leq C$, terminando a demonstração do Teorema.

1.4. TEOREMA: Sejam Φ_0, Φ_1 funções de Orlicz , w um peso e E um reticulado de Banach com concavidade finita. Se Φ é dada por 1.1(1) então

$$< L^{\Phi_0}_{(w)}(E), L^{\Phi_1}_{(w)}(E) >_{\rho,p} = L^{\Phi}_{(w)}(E) \tag{1}$$

com equivalência de normas, onde $1 \leq p \leq \infty$.

Demonstração. Consideremos inicialmente $a \in L^{\Phi}_{(w)}(E)$ com $\|a\|_{L^{\Phi}_{(w)}(E)} \leq 1$, isto é,

$$\int_\Omega \Phi(\|a(x)w(x)\|_E) d\mu \leq 1. \tag{2}$$

Com Φ definida por 1.1(1), vê-se em [12, pg 47] que existe uma função contínua h tal que

$$\Phi(y) = \Phi_0\left(\frac{y}{\rho(h(y))}\right) = \Phi_1\left(\frac{yh(y)}{\rho(h(y))}\right). \tag{3}$$

Para cada $n \in \mathbb{Z}$ seja $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ definida como no Teorema IV.2.2 onde agora

$$B_n = \{x \in \Omega : \|a(x)w(x)\|_E \in h^{-1}([2^{n-1}, 2^n))\}.$$

Assim B_n é μ-mensurável, $\Omega = \cup_{n\in\mathbb{Z}} B_n$ e $B_n \cap B_m = \emptyset$ se $n \neq m$. Segue de (3) que em B_n vale para $k = 0, 1$,

$$\Phi_k\left(\frac{2^{k(n-1)}\|a(x)w(x)\|_E}{\rho(2^{n-k})}\right) \leq \Phi(\|a(x)w(x)\|_E) \tag{4}$$

Seja $F \subset \mathbb{Z}$ um subconjunto finito qualquer. Então usando (2) e (4) temos

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \Phi_k\left(\frac{1}{2^k \sum_F \lambda_n}\|(\sum_F \tilde{r}_n(t)\frac{2^{kn}}{\rho(2^n)}a_n(x))w(x)\|_E\right) d\mu \leq \\
&\leq \sum_F \int_{B_n} \Phi_k\left(\frac{\lambda_n}{\sum_F \lambda_n}\|\frac{2^{k(n-1)}a(x)w(x)}{\rho(2^{n-k})}\|_E\right) d\mu \\
&\leq \int_\Omega \Phi(\|a(x)w(x)\|_E) d\mu \leq 1.
\end{aligned}$$

Logo, concluímos que $a_n \in L^{\Phi_0}_{(w)}(E) \cap L^{\Phi_1}_{(w)}(E)$ e

$$(5) \qquad ||\sum_F \tilde{r}_n(\cdot)\frac{2^{kn}}{\rho(2^n)}a_n||_{L^p([0,1],L^{\Phi_k}_{(w)}(E))} \leq 2^k \sum_F \lambda_n.$$

Podemos também concluir de (5) que $(\tilde{r}_n(\cdot)2^{kn}a_n/\rho(2^n))_{n\in\mathbb{Z}}$ é $L^p([0,1],L^{\Phi_k}_{(w)}(E))$-somável, $k=0,1$, e

$$(6) \qquad \max_{k=0,1}\sup_F ||\sum_F \tilde{r}_n(\cdot)\frac{2^{kn}}{\rho(2^n)}a_n||_{L^p([0,1],L^{\Phi_k}_{(w)}(E))} \leq 2.$$

A seguir consideremos $F_0 \subset \mathbb{Z}_-$ e $F_1 \subset \mathbb{Z}_+$ dois conjuntos finitos quaisquer. Então usando novamente (2) e (4) temos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \Phi_k\left(\frac{1}{\sum_{F_k}\lambda_n}||\sum_{F_k}a_n(x)w(x)||_E\right)d\mu &= \sum_{F_k}\int_{B_n}\Phi_k\left(\frac{\lambda_n}{\sum_{F_k}\lambda_n}||a(x)w(x)||_E\right)d\mu \\
&\leq \sum_{F_k}\int_{B_n}\Phi_k\left(||\frac{2^{k(n-1)}}{\rho(2^{n-k})}a(x)w(x)||_E\right)d\mu \\
&\leq \int_\Omega \Phi(||a(x)w(x)||_E)d\mu \leq 1
\end{aligned}$$

Então para $k=0,1$ temos que

$$||\sum_{F_k}a_n||_{L^{\Phi_k}_{(w)}(E)} \leq \sum_{F_k}\lambda_n$$

o que mostra que $(a_n)_{n\leq 0}$ é somável em $L^{\Phi_0}_{(w)}(E)$ e $(a_n)_{n>0}$ é somável em $L^{\Phi_1}_{(w)}(E)$. De modo análogo ao Teorema V.1.2 provamos que $a = \sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n$ com convergência em $L^{\Phi_0}_{(w)}(E) + L^{\Phi_1}_{(w)}(E)$. Assim $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ é uma sequência admissível para a, e desta forma $a \in <L^{\Phi_0}_{(w)}(E), L^{\Phi_1}_{(w)}(E)>_{\rho,p}$. Além disso segue de (6) que

$$||a||_{<L^{\Phi_0}_{(w)}(E),L^{\Phi_1}_{(w)}(E)>_{\rho,p}} \leq 2$$

provando que $L^{\Phi}_{(w)}(E) \hookrightarrow <L^{\Phi_0}_{(w)}(E), L^{\Phi_1}_{(w)}(E)>_{\rho,p}$.

Seja agora $a \in <L^{\Phi_0}_{(w)}(E), L^{\Phi_1}_{(w)}(E)>_{\rho,p}$ com $||a||_{<L^{\Phi_0}_{(w)}(E),L^{\Phi_1}_{(w)}(E)>_{\rho,p}} < 1$ e $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ uma sequência admissível para a tal que

$$(7) \qquad \max_{k=0,1}\sup_F ||\sum_F \tilde{r}_n(\cdot)\frac{2^{kn}}{\rho(2^n)}a_n||_{L^p([0,1],L^{\Phi_k}_{(w)}(E))} \leq 1.$$

Usando (7) e a desigualdade de Khintchine-Maurey para E temos

$$(8) \qquad \max_{k=0,1} \sup_F ||(\sum_F (\frac{2^{kn}}{\rho(2^n)}|a_n|)^2)^{1/2}||_{L^{\Phi_k}_{(w)}(E)} \leq C_1$$

e então

$$(9) \qquad \max_{k=0,1} \sup_F \int_\Omega \Phi_k \left(\frac{1}{C_1} ||(\sum_F (\frac{2^{kn}}{\rho(2^n)}|a_n(x)|)^2)^{1/2} w(x)||_E \right) d\mu \leq 1$$

Por outro lado como $(\tilde{r}_n(\cdot)2^{kn}a_n/\rho(2^n))_{n\in\mathbb{Z}}$ é $L^p([0,1], L^{\Phi_k}_{(w)}(E))$-somável temos que dado $\varepsilon > 0$, existe $F_\varepsilon \subset \mathbb{Z}$ finito tal que se $F' \subset \mathbb{Z}$ é finito com $F' \cap F_\varepsilon = \emptyset$ então, após usarmos a desigualdade de Khintchin-Maurey para E temos

$$||(\sum_{F'} (\frac{2^{kn}}{\rho(2^n)}|a_n|)^2)^{1/2}||_{L^{\Phi_k}_{(w)}(E)} \leq \varepsilon$$

ou equivalentemente

$$(10) \qquad \int_\Omega \Phi_k \left(\frac{1}{\varepsilon} ||(\sum_{F'} (\frac{2^{kn}}{\rho(2^n)}|a_n(x)|)^2)^{1/2} w(x)||_E \right) d\mu \leq 1$$

Pela Proposição IV.1.3 temos para $F \subset \mathbb{Z}$ finito que

$$||\sum_F a_n(x)w(x)||_E \leq CR \left(||(\sum_F (\frac{1}{\rho(2^n)}|a_n(x)|)^2)^{1/2} w(x)||_E, ||(\sum_F (\frac{2^n}{\rho(2^n)}|a_n(x)|)^2)^{1/2} w(x)||_E \right)$$

onde $R(s,t) = s\rho(t/s)$. Consideremos $A_k(x) = ||(\sum_{F'} (\frac{2^{kn}}{\rho(2^n)}|a_n(x)|)^2)^{1/2} w(x)||_E$ e $A(x) = \max_{k=0,1} \Phi_k(A_k(x)/2\varepsilon)$. Então

$$\begin{aligned} \frac{1}{2C\varepsilon} ||\sum_{F'} a_n(x)w(x)||_E &\leq R\left(\frac{A_0(x)}{2\varepsilon}, \frac{A_1(x)}{2\varepsilon} \right) \\ &\leq R(\Phi_0^{-1}(A(x)), \Phi_1^{-1}(A(x))) = \Phi^{-1}(A(x)) \end{aligned}$$

e usando (10) e convexidade temos

$$\begin{aligned} \int_\Omega \Phi \left(\frac{1}{2C\varepsilon} ||\sum_{F'} a_n(x)w(x)||_E \right) d\mu &\leq \int_\Omega \left(\Phi_0 \left(\frac{A_0(x)}{2\varepsilon} \right) + \Phi_1 \left(\frac{A_1(x)}{2\varepsilon} \right) \right) d\mu \\ &\leq \frac{1}{2} \int_\Omega \left(\Phi_0 \left(\frac{A_0(x)}{\varepsilon} \right) + \Phi_1 \left(\frac{A_1(x)}{\varepsilon} \right) \right) d\mu \leq 1 \end{aligned}$$

ou seja

(11)
$$\|\sum_{F'} a_n\|_{L^{\Phi}_{(w)}(E)} \leq 2C\varepsilon.$$

Assim $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ é somável em $L^{\Phi}_{(w)}(E)$ e então usando a primeira inclusão e o Teorema III.2.2 concluímos que $a = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n$ em $L^{\Phi}_{(w)}(E)$ provando que $a \in L^{\Phi}_{(w)}(E)$. Agora, repetindo o mesmo processo trocando ε por C_1 e usando (9) temos

$$\|\sum_{F} a_n\|_{L^{\Phi}_{(w)}(E)} \leq CC_1$$

para qualquer $F \subset \mathbb{Z}$ finito. Finalmente passando o limite na desigualdade acima temos que $\|a\|_{L^{\Phi}_{(w)}(E)} \leq C$, terminando a demonstração.

2. CASO $\rho(t) = t^\theta$

Nesta seção demonstraremos teoremas de interpolação onde variamos mais de um parâmetro dos espaços de Orlicz considerados.

2.1. TEOREMA: Sejam (E_0, E_1) um par de Banach de reticulados de Banach de cotipo finito, Φ_0, Φ_1 funções de Orlicz que juntamente com suas conjugadas satisfaçam a condição-Δ_2 e w um peso. Se $\rho(t) = t^\theta$, $0 < \theta < 1$ e Φ é definida por

(1)
$$\Phi^{-1} = (\Phi_0^{-1})^{1-\theta}(\Phi_1^{-1})^{\theta}$$

então

(2)
$$< L^{\Phi_0}_{(w)}(E_0), L^{\Phi_1}_{(w)}(E_1) >_{\rho,p} = L^{\Phi}_{(w)}(< E_0, E_1 >_{\rho,p})$$

com equivalência de normas.

Demonstração. Seja $a \in L^{\Phi}_{(w)}(< E_0, E_1 >_{\rho,p})$, com $\|a\|_{L^{\Phi}_{(w)}(<E_0,E_1>_{\rho,p})} \leq 1$, ou equivalentemente,

(3)
$$\int_\Omega \Phi(\|a(x)w(x)\|_{<E_0,E_1>_{\rho,p}})d\mu \leq 1.$$

Vamos supor também que aw é uma função simples a valores em $< E_0, E_1 >_{\rho,p}$, isto é,

$$aw = \sum_{j=1}^{N} a_j \chi_{B_j}$$

com $a_j \in < E_0, E_1 >_{\rho,p}$. Para cada $j = 1, \cdots, N$ seja $(a_n^j)_{n\in\mathbb{Z}}$ uma sequência admissível para a_j tal que

(4) $$\max_{k=0,1} \sup_F \| \sum_F \bar{r}_n(\cdot) 2^{(k-\theta)n} a_n^j \|_{L^p([0,1],E_k)} \leq 2 \|a_j\|_{<E_0,E_1>_{\rho,p}},$$

ou, usando a desigualdade de Khintchine-Maurey para E_k,

(5) $$\max_{k=0,1} \sup_F \|(\sum_F (2^{(k-\theta)n} |a_n^j|)^2)^{1/2}\|_{E_k} \leq C \|a_j\|_{<E_0,E_1>_{\rho,p}}.$$

Para cada $n \in \mathbb{Z}$ seja a_n definida por

$$a_n(x)w(x) = \begin{cases} a_{n-z}^j & \text{se } x \in B_j \ , j = 1, \cdots N, \\ 0 & \text{se } x \notin \cup B_j \end{cases}$$

onde $z = [t] = [\log_2 h(\|a_j\|_{<E_0,E_1>_{\rho,p}})]$ e h é uma função contínua tal que

(6) $$\Phi(y) = \Phi_0(yh(y)^\theta) = \Phi_1(yh(y)^{1-\theta}).$$

Como $t \leq [t] \leq t+1$ temos que

(7) $$2^{-\theta z} \leq 2^{-\theta \log_2 h(\|a_j\|_{<E_0,E_1>_{\rho,p}})} = h^{-\theta}(\|a_j\|_{<E_0,E_1>_{\rho,p}})$$

e

(8) $$2^{(1-\theta)(z-1)} \leq 2^{(1-\theta)\log_2 h(\|a_j\|_{<E_0,E_1>_{\rho,p}})} = h^{1-\theta}(\|a_j\|_{<E_0,E_1>_{\rho,p}})$$

Seja $F \subset \mathbb{Z}$ um conjunto finito qualquer. Segue de (3), (4), (5), (6), (7) e (8) que

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \Phi_k \left(\frac{1}{2^{k(1-\theta)}C} \|(\sum_F (2^{(k-\theta)n} |a_n(x)|)^2)^{1/2} w(x)\|_{E_k} \right) d\mu \\
&= \sum_{j=1}^N \int_{B_j} \Phi_k \left(\frac{1}{2^{k(1-\theta)}C} \|(\sum_{F+z} (2^{(k-\theta)n} |a_n^j|)^2)^{1/2} 2^{(k-\theta)z} \|_{E_k} \right) d\mu \\
&\leq \sum_{j=1}^N \int_{B_j} \Phi_k(\|a_j\|_{<E_0,E_1>_{\rho,p}} 2^{(k-\theta)z}) d\mu \\
&\leq \sum_{j=1}^N \int_{B_j} \Phi_k(\|a_j\|_{<E_0,E_1>_{\rho,p}} h^{k-\theta}(\|a_j\|_{<E_0,E_1>_{\rho,p}})) d\mu \\
&= \int_\Omega \Phi(\|a(x)w(x)\|_{<E_0,E_1>_{\rho,p}}) d\mu \leq 1
\end{aligned}$$

ou equivalentemente

(9) $$\|(\sum_F (2^{(k-\theta)n} |a_n|)^2)^{1/2}\|_{L^{\Phi_k}_{(w)}(E_k)} \leq 2^{k(1-\theta)} C$$

Usando a desigualdade de Khintchine-Maurey para $L^{\Phi_k}_{(w)}(E_k)$ (ver Corolário V.2.3) temos de (9) que

$$(10) \qquad \|\sum_F \tilde{r}_n(\cdot)2^{(k-\theta)n}a_n\|_{L^p([0,1],L^{\Phi_k}_{(w)}(E_k))} \leq 2^{k(1-\theta)}C.$$

Podemos assim concluir que $a_n \in L^{\Phi_0}_{(w)}(E_0) \cap L^{\Phi_1}_{(w)}(E_1)$ e que

$$(11) \qquad \|\sum_F \tilde{r}_n(\cdot)2^{(k-\theta)n}a_n\|_{L^p([0,1],L^{\Phi_k}_{(w)}(E_k))} \leq C.$$

Consideremos agora $F_0 \subset \mathbb{Z}_-$ e $F_1 \subset \mathbb{Z}_+$ subconjuntos finitos quaisquer. Segue de (3), (4), (6), (7) e (8) que

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \Phi_k\left(\frac{1}{2^{1+k(1-\theta)}\sum_{F_k}2^{(\theta-k)n}}\|\sum_{F_k}a_n(x)w(x)\|_{E_k}\right)d\mu \leq \\
&\leq \sum_{j=1}^N\int_{B_j}\Phi_k\left(\frac{1}{2^{1+k(1-\theta)}\sum_{F_k}2^{(\theta-k)n}}\|\sum_{F_k+z}a_n^j\|_{E_k}\right)d\mu \\
&= \sum_{j=1}^N\int_{B_j}\Phi_k\left(\frac{1}{2^{1+k(1-\theta)}\sum_{F_k}2^{(\theta-k)n}}\sum_{F_k+z}2^{(\theta-k)(n+z)}\|2^{(k-\theta)n}a_n^j\|_{E_k}2^{(k-\theta)z}\right)d\mu \\
&\leq \sum_{j=1}^N\int_{B_j}\Phi_k\left(\frac{1}{\sum_{F_k}2^{(\theta-k)n}}\sum_{F_k+z}2^{(\theta-k)(n+z)}\|a_j\|_{<E_0,E_1>_{\rho,p}}2^{(k-\theta)(z-k)}\right)d\mu \\
&\leq \sum_{j=1}^N\int_{B_j}\Phi_k(\|a_j\|_{<E_0,E_1>_{\rho,p}}h^{k-\theta}(\|a_j\|_{<E_0,E_1>_{\rho,p}}))d\mu \\
&= \int_\Omega \Phi(\|a(x)w(x)\|_{<E_0,E_1>_{\rho,p}})d\mu \leq 1
\end{aligned}$$

e então

$$\|\sum_{F_k}a_n\|_{L^{\Phi_k}_{(w)}(E_k)} \leq 2^{1+k(1-\theta)}\sum_{F_k}2^{(\theta-k)n}$$

o que prova que $(a_n)_{n<0}$ é $L^{\Phi_0}_{(w)}(E_0)$-somável e $(a_n)_{n\geq 0}$ é $L^{\Phi_1}_{(w)}(E_1)$-somável. Consequentemente, podemos concluir que $a = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n$ com convergência em $L^{\Phi_0}_{(w)}(E_0) + L^{\Phi_1}_{(w)}(E_1)$. Agora como $(\tilde{r}_n(\cdot)2^{(k-\theta)n}a_n^j)_{n\in\mathbb{Z}}$ é (absolutamente) somável em $L^p([0,1],E_k)$ segue que dado $\varepsilon > 0$, existem $F_\varepsilon^j \subset \mathbb{Z}$ finitos, $j = 1,\cdots,N$ tais que se $F' \cap F_\varepsilon^j = \emptyset$ com $F' \subset \mathbb{Z}$ finito então

$$(12) \qquad \sum_{F'} \|\tilde{r}_n(\cdot)2^{(k-\theta)n}a_n^j\|_{L^p([0,1],E_k)} =$$
$$= \sum_{F'} \|2^{(k-\theta)n}a_n^j\|_{E_k}$$
$$< \frac{\varepsilon}{2^{k(1-\theta)}} h^{\theta-k}(\|a_j\|_{<E_0,E_1>_{\rho,p}})\Phi_k^{-1}\left(\frac{1}{\sum_{j=1}^N \mu(B_j)}\right).$$

Seja $F_\varepsilon = \cup_{j=1}^N (F_\varepsilon^j - z)$ e $F' \subset \mathbb{Z}$ finito com $F' \cap F_\varepsilon = \emptyset$. Assim $(F' + z) \cap F_\varepsilon^j = \emptyset$ para cada $j = 1, \cdots, N$ e usando (3), (7), (8) e (12) temos

$$\int_\Omega \Phi_k\left(\frac{1}{\varepsilon}\|(\sum_{F'} \tilde{r}_n(t)2^{(k-\theta)n}a_n(x))w(x)\|_{E_k}\right) d\mu \leq$$
$$\leq \sum_{j=1}^N \int_{B_j} \Phi_k\left(\frac{2^{k(1-\theta)}}{\varepsilon} \sum_{F'+z} \|2^{(k-\theta)n}a_n^j\|_{E_k} 2^{(k-\theta)(z-k)}\right) d\mu$$
$$\leq \sum_{j=1}^N \int_{B_j} \Phi_k\left(\frac{2^{k(1-\theta)}}{\varepsilon} \sum_{F'+z} \|2^{(k-\theta)n}a_n^j\|_{E_k} h^{k-\theta}(\|a_j\|_{<E_0,E_1>_{\rho,p}})\right) d\mu$$
$$\leq \sum_{j=1}^N \int_{B_j} \Phi_k\left(\Phi_k^{-1}\left(\frac{1}{\sum_{j=1}^N \mu(B_j)}\right)\right) d\mu = 1$$

e então

$$\|\sum_{F'} \tilde{r}_n(\cdot)2^{(k-\theta)n}a_n\|_{L^p([0,1],L_{(w)}^{\Phi_k}(E_k))} \leq \varepsilon$$

o que mostra que $(\tilde{r}_n(\cdot)2^{(k-\theta)n}a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ é somável em $L^p([0,1], L_{(w)}^{\Phi_k}(E_k))$. Mostramos assim que $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ é uma sequência admissível para a e usando (11) temos que

$$\|a\|_{<L_{(w)}^{\Phi_0}(E_0), L_{(w)}^{\Phi_1}(E_1)>_{\rho,p}} \leq C$$

A conclusão da inclusão

$$L_{(w)}^{\Phi}(<E_0, E_1>_{\rho,p}) \hookrightarrow <L_{(w)}^{\Phi_0}(E_0), L_{(w)}^{\Phi_1}(E_1)>_{\rho,p}$$

segue por densidade.

Consideremos agora $a \in <L_{(w)}^{\Phi_0}(E_0), L_{(w)}^{\Phi_1}(E_1)>_{\rho,p}$ com $\|a\|_{<L_{(w)}^{\Phi_0}(E_0), L_{(w)}^{\Phi_1}(E_1)>_{\rho,p}} < 1$ e seja $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ uma sequência admissível para a tal que

$$(13) \qquad \max_{k=0,1} \sup_F \|\sum_F \tilde{r}_n(\cdot)2^{(k-\theta)n}a_n\|_{L^p([0,1],L^{\Phi_k}_{(w)}(E_k))} \leq 1$$

ou usando a desigualdade de Khintchine-Maurey para E_k, segue de (13) que

$$(14) \qquad \max_{k=0,1} \sup_F \|(\sum_F (2^{(k-\theta)n}|a_n|)^2)^{1/2}\|_{L^{\Phi_k}_{(w)}(E_k)} \leq C$$

De maneira análoga ao Teorema IV.3.2 temos para $F \subset \mathbb{Z}$ finito que

$$\|\sum_F a_n(x)w(x)\|_{<E_0,E_1>_{\rho,p}} \leq$$

$$\leq C\|(\sum_F 2^{-\theta n}|a_n(x)|)^2)^{1/2}w(x)\|_{E_0}^{1-\theta}\|(\sum_F 2^{(1-\theta)n}|a_n(x)|)^2)^{1/2}w(x)\|_{E_1}^{\theta}$$

Agora como $(\tilde{r}_n(\cdot)2^{(k-\theta)n}a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ é $L^p([0,1],L^{\Phi_k}_{(w)}(E_k))$-somável temos que dado $\varepsilon > 0$ existe $F_\varepsilon \subset \mathbb{Z}$ finito tal que se $F' \cap F_\varepsilon = \emptyset$ com $F' \subset \mathbb{Z}$ finito, segue após usarmos a desigualdade de Khintchine-Maurey para E_k, que

$$(15) \qquad \|(\sum_{F'} (2^{(k-\theta)n}|a_n|)^2)^{1/2}\|_{L^{\Phi_k}_{(w)}(E_k)} < \varepsilon$$

A seguir vamos considerar $A_k(x) = \|(\sum_{F'} 2^{(k-\theta)n}|a_n(x)|)^2)^{1/2}w(x)\|_{E_k}$ e $A(x) = \max_{k=0,1} \Phi_k(A_k(x)/2\varepsilon)$. Então usando (1) e (15) temos

$$(16) \quad \frac{1}{2\varepsilon}\|\sum_{F'} a_n(x)w(x)\|_{<E_0,E_1>_{\rho,p}} \leq C(\Phi_0^{-1}(A(x)))^{1-\theta}(\Phi_1^{-1}(A(x)))^{\theta} = C\Phi^{-1}(A(x)).$$

Agora fazendo uso de (3), (15), (16) e convexidade temos

$$\int_\Omega \Phi\left(\frac{1}{2C\varepsilon}\|\sum_{F'} a_n(x)w(x)\|_{<E_0,E_1>_{\rho,p}}\right) d\mu \leq \frac{1}{2}\int_\Omega \left(\Phi_0\left(\frac{A_0(x)}{\varepsilon}\right) + \Phi_1\left(\frac{A_1(x)}{\varepsilon}\right)\right) d\mu \leq 1.$$

Assim $\|\sum_{F'} a_n\|_{L^{\Phi}_{(w)}(<E_0,E_1>_{\rho,p})} \leq 2C\varepsilon$, mostrando que $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ é somável em $L^{\Phi}_{(w)}(<E_0,E_1>_{\rho,p})$. Mas usando a primeira inclusão e o Teorema III.2.2 segue que $a = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n$ com convergência em $L^{\Phi}_{(w)}(<E_0,E_1>_{\rho,p})$. Repetindo o raciocínio acima, usando (14) no lugar de (15) concluímos para $F \subset \mathbb{Z}$ finito qualquer, que $\|\sum_F a_n\|_{L^{\Phi}_{(w)}(<E_0,E_1>_{\rho,p})} \leq C$ e após passagem ao limite concluímos o Teorema.

2.2. TEOREMA: Sejam Φ_0, Φ_1 funções de Orlicz e w_0, w_1 dois pesos. Se E é um reticulado de Banach com concavidade finita, $\rho(t) = t^\theta$, $0 < \theta < 1$, e Φ e w são definidos por

$$(1) \qquad \Phi^{-1} = (\Phi_0^{-1})^{1-\theta}(\Phi_1^{-1})^{\theta} \ , \ w = w_0^{1-\theta}w_1^{\theta},$$

então

$$(2) \qquad < L^{\Phi_0}_{(w_0)}(E), L^{\Phi_1}_{(w_1)}(E) >_{\rho,p} = L^{\Phi}_{(w)}(E).$$

com equivalência de normas.

Demonstração. Seja $a \in L^{\Phi}_{(w)}(E)$ com $||a||_{L^{\Phi}_{(w)}(E)} \leq 1$ e h uma função contínua tal que

$$(3) \qquad \Phi(y) = \Phi_0(yh(y)^{-\theta}) = \Phi_1(yh(y)^{1-\theta}).$$

Consideremos $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ definida como no Teorema IV.2.2 onde

$$B_n = \{x \in \Omega : 2^{n-1} < \frac{w_0(x)}{w_1(x)} h(||a(x)w(x)||_E) \leq 2^n\}$$

Assim B_n é μ-mensurável, $\Omega = \cup B_n$ e $B_n \cap B_m = \emptyset$ se $n \neq m$. Verifiquemos que $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ é uma sequência admissível para a. Se $F \subset \mathbb{Z}$ é um conjunto finito qualquer, segue de (3) que

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \Phi_0 \left(\frac{1}{\sum_F \lambda_n} ||(\sum_F \tilde{r}_n(t) 2^{-\theta n} a_n) w_0(x)||_E \right) d\mu = \\
&= \sum_{n\in F} \int_{B_n} \Phi_0 \left(\frac{1}{\sum_F \lambda_n} ||2^{-\theta n} \lambda_n a(x) w_0(x)||_E \right) d\mu \\
&\leq \sum_{n\in F} \int_{B_n} \Phi_0 \left(||a(x) w_0(x) \left(\frac{w_0(x)}{w_1(x)} h(||a(x)w(x)||_E) \right)^{-\theta} ||_E \right) d\mu \\
&= \sum_{n\in F} \int_{B_n} \Phi_0(||a(x)w(x)||_E h(||a(x)w(x)||_E)^{-\theta}) d\mu \\
&\leq \int_\Omega \Phi(||a(x)w(x)||_E) d\mu \leq 1
\end{aligned}$$

mostrando que

$$(4) \qquad ||\sum_F \tilde{r}_n(\cdot) 2^{-\theta n} a_n||_{L^p([0,1], L^{\Phi_0}_{(w_0)}(E))} \leq \sum_{n\in F} \lambda_n.$$

Do mesmo modo,

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \Phi_1 \left(\frac{1}{2^{1-\theta} \sum_F \lambda_n} ||(\sum_F \tilde{r}_n(t) 2^{(1-\theta)n} a_n) w_1(x)||_E \right) d\mu = \\
&= \sum_{n\in F} \int_{B_n} \Phi_1 \left(\frac{1}{\sum_F \lambda_n} ||2^{(1-\theta)(n-1)} \lambda_n a(x) w_1(x)||_E \right) d\mu
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \sum_{n\in F}\int_{B_n}\Phi_1\left(||a(x)w_1(x)\left(\frac{w_0(x)}{w_1(x)}h(||a(x)w(x)||_E)\right)^{1-\theta}||_E\right)d\mu\\
&=\sum_{n\in F}\int_{B_n}\Phi_1(||a(x)w(x)||_E h(||a(x)w(x)||_E)^{1-\theta})d\mu\\
&\leq \int_\Omega \Phi(||a(x)w(x)||_E)d\mu\leq 1
\end{aligned}
$$

ou seja

(5) $$||\sum_F \tilde{r}_n(\cdot)2^{(1-\theta)n}a_n||_{L^p([0,1],L^{\Phi_1}_{(w_0)}(E))}\leq 2^{1-\theta}\sum_{n\in F}\lambda_n.$$

Fica assim provado por (4) e (5) que $a_n\in L^{\Phi_0}_{(w_0)}(E)\cap L^{\Phi_1}_{(w_1)}(E)$, $(\tilde{r}_n(\cdot)2^{(k-\theta)n}a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ é $L^p([0,1],L^{\Phi_k}_{(w_k)}(E))$-somável e que

(6) $$\max_{k=0,1}\sup_F||\sum_F\tilde{r}_n(\cdot)2^{(k-\theta)n}a_n||_{L^p([0,1],L^{\Phi_k}_{(w_k)}(E))}\leq 2^{1-\theta}.$$

Resta somente mostra que $a=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n$ com convergência em $L^{\Phi_0}_{(w_0)}(E)+L^{\Phi_1}_{(w_1)}(E)$. Mas para $F\subset\mathbb{Z}_-$ temos

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega\Phi_0\left(\frac{1}{\sum_F\lambda_n}||\sum_F a_n w_0(x)||_E\right)d\mu=\\
&=\sum_{n\in F}\int_{B_n}\Phi_0\left(\frac{\lambda_n}{\sum_F\lambda_n}2^{\theta n}||2^{-\theta n}a(x)w_0(x)||_E\right)d\mu\\
&\leq\sum_{n\in F}\int_{B_n}\Phi_0\left(||a(x)w_0(x)\left(\frac{w_0(x)}{w_1(x)}h(||a(x)w(x)||_E)\right)^{-\theta}||_E\right)d\mu\\
&=\sum_{n\in F}\int_{B_n}\Phi_0(||a(x)w(x)||_E h(||a(x)w(x)||_E)^{-\theta})d\mu\\
&\leq\int_\Omega\Phi(||a(x)w(x)||_E)d\mu\leq 1
\end{aligned}
$$

e analogamente para $F\subset\mathbb{Z}_+$ finito temos

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega\Phi_1\left(\frac{1}{\sum_F\lambda_n}||\sum_F a_n w_1(x)||_E\right)d\mu=\\
&=\sum_{n\in F}\int_{B_n}\Phi_1\left(\frac{\lambda_n}{\sum_F\lambda_n}2^{(\theta-1)(n-1)}||2^{(1-\theta)(n-1)}a(x)w_1(x)||_E\right)d\mu\\
&\leq\sum_{n\in F}\int_{B_n}\Phi_1\left(||a(x)w_1(x)\left(\frac{w_0(x)}{w_1(x)}h(||a(x)w(x)||_E)\right)^{1-\theta}||_E\right)d\mu
\end{aligned}
$$

$$= \sum_{n\in F} \int_{B_n} \Phi_1(||a(x)w(x)||_E h(||a(x)w(x)||_E)^{1-\theta}) d\mu$$
$$\leq \int_\Omega \Phi(||a(x)w(x)||_E) d\mu \leq 1$$

o que mostra que

$$||\sum_F a_n||_{L^{\Phi_k}_{(w_k)}(E)} \leq \sum_F \lambda_n$$

se $k = 0$ e $F \subset \mathbb{Z}_+$ ou se $k = 1$ e $F \subset \mathbb{Z}_-$. Logo $(a_n)_{n<0}$ é $L^{\Phi_0}_{(w_0)}(E)$-somável e $(a_n)_{n\geq 0}$ é $L^{\Phi_1}_{(w_1)}(E)$-somável. Considerando $b_0 = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n$ e $b_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ em $L^{\Phi_0}_{(w_0)}(E)$ e $L^{\Phi_1}_{(w_1)}(E)$ respectivamente, temos $a = b_0 + b_1$ e $a = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n$ com convergência em $L^{\Phi_0}_{(w_0)}(E) + L^{\Phi_1}_{(w_1)}(E)$. Desta forma demonstramos que $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ é uma sequência admissível para a e além disso segue de (6) que

$$||a||_{<L^{\Phi_0}_{(w_0)}(E), L^{\Phi_1}_{(w_1)}(E)>_{\rho,p}} \leq 2^{1-\theta}$$

mostrando que

$$L^{\Phi}_{(w)}(E) \hookrightarrow < L^{\Phi_0}_{(w_0)}(E), L^{\Phi_1}_{(w_1)}(E) >_{\rho,p} .$$

Para demonstrarmos a outra inclusão vamos considerar $a \in < L^{\Phi_0}_{(w_0)}(E), L^{\Phi_1}_{(w_1)}(E) >_{\rho,p}$ com $||a||_{<L^{\Phi_0}_{(w_0)}(E), L^{\Phi_1}_{(w_1)}(E)>_{\rho,p}} < 1$ e $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ uma sequência admissível para a tal que

$$\max_{k=0,1} \sup_F ||\sum_F \tilde{r}_n(\cdot) 2^{(k-\theta)n} a_n||_{L^p([0,1], L^{\Phi_k}_{(w_k)}(E))} \leq 1 \tag{7}$$

Desde que $(\tilde{r}_n(\cdot)2^{(k-\theta)n}a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ é $L^p([0,1], L^{\Phi_k}_{(w_k)}(E))$-somável segue que dado $\varepsilon > 0$ existe $F_\varepsilon \subset \mathbb{Z}$ finito tal que se $F' \subset \mathbb{Z}$ é finito com $F' \cap F_\varepsilon = \emptyset$, temos após usarmos a desigualdade de Khintchine-Maurey para E que

$$||(\sum_{F'}(2^{(k-\theta)n}|a_n|)^2)^{1/2}||_{L^{\Phi_k}_{(w_k)}(E)} \leq \varepsilon. \tag{8}$$

Agora, da Proposição IV.1.3 temos

$$||\sum_{F'} a_n(x)||_E \leq C||(\sum_{F'}(2^{-\theta n}|a_n(x)|)^2)^{1/2}||_E^{1-\theta} ||(\sum_{F'}(2^{(1-\theta)n}|a_n(x)|)^2)^{1/2}||_E^{\theta}$$

e da relação (1) temos então

$$\frac{1}{2C\varepsilon}\|\sum_{F'} a_n(x)w(x)\|_E \leq$$
$$\leq \|\frac{1}{\varepsilon}(\sum_{F'}(2^{-\theta n}|a_n(x)|)^2)^{1/2}w_0(x)\|_E^{1-\theta}\|\frac{1}{\varepsilon}(\sum_{F'}(2^{(1-\theta)n}|a_n(x)|)^2)^{1/2}w_1(x)\|_E^{\theta}$$

Seja $A_k(x) = \|(\sum_{F'} 2^{(k-\theta)n}|a_n(x)|)^2)^{1/2}w(x)\|_{E_k}$ e $A(x) = \max_{k=0,1} \Phi_k(A_k(x)/2\varepsilon)$. Então usando (1) temos

$$\frac{1}{2C\varepsilon}\|\sum_{F'} a_n(x)w(x)\|_E \leq (\Phi_0^{-1}(A(x)))^{1-\theta}(\Phi_1^{-1}(A(x)))^{\theta} = \Phi^{-1}(A(x)) \tag{9}$$

Agora fazendo uso de (8), (9) e convexidade temos

$$\int_\Omega \Phi\left(\frac{1}{2C\varepsilon}\|\sum_{F'} a_n(x)w(x)\|_E\right)d\mu \leq \frac{1}{2}\int_\Omega \left(\Phi_0\left(\frac{A_0(x)}{\varepsilon}\right)+\Phi_1\left(\frac{A_1(x)}{\varepsilon}\right)\right)d\mu \leq 1$$

ou seja, $\|\sum_{F'} a_n\|_{L^{\Phi}_{(w)}(E)} \leq 2C\varepsilon$, mostrando que $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ é somável em $L^{\Phi}_{(w)}(E)$. Mas usando a primeire inclusão e o Teorema III.2.2 concluímos que $L^{\Phi}_{(w)}(E) \hookrightarrow L^{\Phi_0}_{(w_0)}(E) + L^{\Phi_1}_{(w_1)}(E)$. Agora desde que $a = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n$ em $L^{\Phi_0}_{(w_0)}(E)+L^{\Phi_1}_{(w_1)}(E)$ segue que $a = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n$ em $L^{\Phi}_{(w)}(E)$, ou seja, $a \in L^{\Phi}_{(w)}(E)$. Além disso, repetindo o processo acima, usando (7) e a desigualdade de Khintchine-Maurey, concluímos que se $F \subset \mathbb{Z}$ é finito então $\|\sum_F a_n\|_{L^{\Phi}_{(w)}(E)} \leq C$ e após passagem ao limite concluímos o Teorema.

3. CASOS LIMITES

Para o Teorema 1.4 temos o seguinte caso limite.

3.1. TEOREMA: Sejam Φ_0 uma função de Orlicz, w um peso e E um reticulado de Banach com concavidade finita. Se Φ é dada por

$$\Phi^{-1} = \Phi_0^{-1}\rho\left(\frac{1}{\Phi_0^{-1}}\right) \tag{1}$$

então

$$< L^{\Phi_0}_{(w)}(E), L^{\infty}_{(w)}(E) >_{\rho,p} = L^{\Phi}_{(w)}(E) \tag{2}$$

com equivalência de normas, onde $1 \leq p \leq \infty$.

Demonstração. Seja $a \in L^{\Phi}_{(w)}(E)$ com $\|a\|_{L^{\Phi}_{(w)}(E)} \leq 1$, ou equivalentemente

$$\int_\Omega \Phi(||a(x)w(x)||_E)d\mu \le 1 \tag{3}$$

Seja h uma função contínua (ver [12]), tal que $yh(y) = \rho(h(y))$ e

$$\Phi(y) = \Phi_0\left(\frac{y}{\rho(h(y))}\right) \tag{4}$$

Para cada $n \in \mathbb{Z}$ definimos $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ como antes, mas com

$$B_n = \{x \in \Omega : ||a(x)w(x)||_E \in h^{-1}([2^{n-1}, 2^n))\}.$$

Assim B_n é μ-mensurável, $\Omega = \cup_{n\in\mathbb{Z}} B_n$ e $B_n \cap B_m = \emptyset$ se $n \neq m$. Segue de (4) que em B_n vale

$$\Phi_0\left(\frac{||a(x)w(x)||_E}{\rho(2^n)}\right) \le \Phi(||a(x)w(x)||_E) \tag{5}$$

e lembrando que $yh(y) = \rho(h(y))$ temos

$$\frac{2^n}{\rho(2^n)} \le 2\frac{2^{n-1}}{\rho(2^{n-1})} \le 2\frac{h(||a(x)w(x)||_E)}{\rho(h(||a(x)w(x)||_E))} = 2||a(x)w(x)||_E^{-1}. \tag{6}$$

Seja $F \subset \mathbb{Z}$ um subconjunto finito qualquer. Então como no Teorema 1.4 temos

$$||\sum_F \tilde{r}_n(\cdot)\frac{1}{\rho(2^n)}a_n||_{L^p([0,1],L^{\Phi_0}_{(w)}(E))} \le \sum_F \lambda_n. \tag{7}$$

Por outro lado, fazendo uso de (6) temos que

$$||\frac{1}{2\sum_F \lambda_n}\sum_F \tilde{r}_n(t)\frac{2^n}{\rho(2^n)}a_n||_{L^\infty_{(w)}(E)} \le \max_{n\in F}\sup_{B_n}||\frac{\lambda_n}{2\sum_F \lambda_n}\frac{2^n a(x)w(x)}{\rho(2^n)}||_E \le 1$$

e então

$$||\sum_F \tilde{r}_n(\cdot)\frac{2^n}{\rho(2^n)}a_n||_{L^p([0,1],L^\infty_{(w)}(E))} \le 2\sum_F \lambda_n. \tag{8}$$

Concluímos então de (7) e (8) que $a_n \in L^{\Phi_0}_{(w)}(E) \cap L^\infty_{(w)}(E)$ e $(\tilde{r}_n(\cdot)2^{kn}a_n/\rho(2^n))_{n\in\mathbb{Z}}$, $k = 0, 1$ são respectivamente somáveis em $L^p([0,1], L^{\Phi_0}_{(w)}(E))$ e $L^p([0,1], L^\infty_{(w)}(E))$,

$$\sup_F ||\sum_F \tilde{r}_n(\cdot)\frac{1}{\rho(2^n)}a_n||_{L^p([0,1],L^{\Phi_0}_{(w)}(E))} \le 1 \tag{9}$$

e

$$\sup_F ||\sum_F \tilde{r}_n(\cdot)\frac{2^n}{\rho(2^n)}a_n||_{L^p([0,1],L^\infty_{(w)}(E))} \le 2. \tag{10}$$

Novamente como no Teorema 1.4 concluímos que $(a_n)_{n\leq 0}$ é somável em $L^{\Phi_0}_{(w)}(E)$. Usando outra vez (6) temos para $F \subset \mathbb{Z}_+$ finito que

$$\|\frac{1}{\sum_F \lambda_n}\sum_F a_n\|_{L^\infty_{(w)}(E)} \leq \max_{n\in F}\sup_{B_n}\|\frac{\lambda_n}{\sum_F \lambda_n}\frac{2^{n-1}a(x)w(x)}{\rho(2^{n-1})}\|_E \leq 1 \quad \mu-\text{a.e.}$$

e então $\|\sum_F a_n\|_{L^\infty_{(w)}(E)} \leq \sum_F \lambda_n$, mostrando que $(a_n)_{n>0}$ é somável em $L^\infty_{(w)}(E)$. Como consequência temos que $a = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n$ com convergência em $L^{\Phi_0}_{(w)}(E) + L^\infty_{(w)}(E)$. Então $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ é uma sequência admissível para a, e consequentemente $a \in < L^{p_0}_{(w)}(E), L^{p_1}_{(w)}(E) >_{\rho,p}$. Além disso segue de (9) e (10) que

$$\|a\|_{<L^{\Phi_0}_{(w)}(E),L^\infty_{(w)}(E)>_{\rho,p}} \leq 2$$

provando que $L^\Phi_{(w)}(E) \hookrightarrow < L^{\Phi_0}_{(w)}(E), L^\infty_{(w)}(E) >_{\rho,p}$.

Seja $a \in < L^{\Phi_0}_{(w)}(E), L^\infty_{(w)}(E) >_{\rho,p}$ com $\|a\|_{<L^{\Phi_0}_{(w)}(E),L^\infty_{(w)}(E)>_{\rho,p}} < 1$ e $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ uma sequência admissível para a tal que

$$\sup_F \|\sum_F \tilde{r}_n(\cdot)\frac{1}{\rho(2^n)}a_n\|_{L^p([0,1],L^{\Phi_0}_{(w)}(E))} \leq 1. \tag{11}$$

e

$$\sup_F \|\sum_F \tilde{r}_n(\cdot)\frac{2^n}{\rho(2^n)}a_n\|_{L^p([0,1],L^\infty_{(w)}(E))} \leq 1. \tag{12}$$

Usando a desigualdade de Khintchine-Maurey para E, segue de (11) e (12) que

$$\sup_F \|(\sum_F(\frac{1}{\rho(2^n)}|a_n|)^2)^{1/2}\|_{L^{\Phi_0}_{(w)}(E)} \leq C_1 \tag{13}$$

e

$$\sup_F \|(\sum_F(\frac{2^n}{\rho(2^n)}|a_n|)^2)^{1/2}\|_{L^\infty_{(w)}(E)} \leq C_1 \tag{14}$$

Segue de (14) que se $F \subset \mathbb{Z}$ é finito então

$$\|(\sum_F(\frac{2^n}{\rho(2^n)}|a_n(x)|)^2)^{1/2}w(x)\|_E \leq C_1 \ , \quad \mu-\text{a.e.} \tag{15}$$

Como $(\tilde{r}_n(\cdot)a_n/\rho(2^n))_{n\in\mathbb{Z}}$ e $(\tilde{r}_n(\cdot)2^n a_n/\rho(2^n))_{n\in\mathbb{Z}}$ são somáveis em $L^p([0,1], L^{\Phi_0}_{(w)}(E))$ e $L^p([0,1], L^\infty_{(w)}(E))$ respectivamente, temos que dado $\varepsilon > 0$, existe $F_\varepsilon \subset \mathbb{Z}$ finito tal que se $F' \subset \mathbb{Z}$ é finito com $F' \cap F_\varepsilon = \emptyset$ então, após usarmos a desigualdade de Khintchine-Maurey para E temos

(16) $$||(\sum_{F'}(\frac{2^{kn}}{\rho(2^n)}|a_n|)^2)^{1/2}||_{L^{\Phi_0}_{(w)}(E)} \leq \varepsilon$$

e

(17) $$||(\sum_{F'}(\frac{2^{n}}{\rho(2^n)}|a_n|)^2)^{1/2}||_{L^{\infty}_{(w)}(E)} \leq \varepsilon$$

Temos que (17) implica em

(18) $$||(\sum_{F'}(\frac{2^{n}}{\rho(2^n)}|a_n(x)|)^2)^{1/2}w(x)||_{E} \leq \varepsilon \quad , \quad \mu-\text{a.e.}$$

Considerando $A_k(x) = ||(\sum_{F'}(2^{kn}|a_n(x)|/\rho(2^n))^2)^{1/2}w(x)||_E$ segue de (1), (18) e da Proposição IV.1.3 que

$$\begin{aligned} ||\sum_{F'} a_n(x)w(x)||_E &\leq CR\left(\frac{A_0(x)}{\varepsilon}, \frac{A_1(x)}{\varepsilon}\right) \leq CR\left(\frac{A_0(x)}{\varepsilon}, 1\right) \\ &= CR\left(\Phi_0^{-1}\left(\Phi_0\left(\frac{A_0(x)}{\varepsilon}\right)\right), 1\right) = C\Phi^{-1}\left(\Phi_0\left(\frac{A_0(x)}{\varepsilon}\right)\right) \end{aligned}$$

Usando agora (16) temos

$$\int_\Omega \Phi\left(\frac{1}{C\varepsilon}||\sum_{F'} a_n(x)w(x)||_E\right) d\mu \leq \int_\Omega \Phi_0\left(\frac{A_0(x)}{\varepsilon}\right) d\mu \leq 1$$

ou seja $||\sum_{F'} a_n||_{L^{\Phi}_{(w)}(E)} \leq C\varepsilon$, provando que $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ é somável em $L^{\Phi}_{(w)}(E)$ e pela primeira inclusão e o Teorema III.2.2 segue que $a = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n$ em $L^{\Phi}_{(w)}(E)$. Além disso, trocando ε por C_1 e usando (13) e (15) temos que $||\sum_F a_n||_{L^{\Phi}_{(w)}(E)} \leq C$. Passando o limite concluímos o Teorema.

O caso limite do Teorema 2.2 é o seguinte.

3.2. TEOREMA: Sejam Φ_0 uma função de Orlicz, w_0, w_1 dois pesos e E um reticulado de Banach com concavidade finita. Se $\rho(t) = t^\theta$, $0 < \theta < 1$, e Φ e w são definidos por $1 \leq p_0 < \infty$,

(1) $$\Phi^{-1} = (\Phi_0^{-1})^{1-\theta} \quad , \quad w = w_0^{1-\theta} w_1^{\theta}$$

então

(2) $$< L^{\Phi_0}_{(w_0)}(E), L^{\infty}_{(w_1)}(E) >_{\rho,p} = L^{\Phi}_{(w)}(E).$$

$$(16) \qquad ||(\sum_{F'}(\frac{2^{kn}}{\rho(2^n)}|a_n|)^2)^{1/2}||_{L^{\Phi_0}_{(w)}(E)} \leq \varepsilon$$

e

$$(17) \qquad ||(\sum_{F'}(\frac{2^{n}}{\rho(2^n)}|a_n|)^2)^{1/2}||_{L^{\infty}_{(w)}(E)} \leq \varepsilon$$

Temos que (17) implica em

$$(18) \qquad ||(\sum_{F'}(\frac{2^{n}}{\rho(2^n)}|a_n(x)|)^2)^{1/2}w(x)||_E \leq \varepsilon \ , \quad \mu - \text{a.e.}$$

Considerando $A_k(x) = ||(\sum_{F'}(2^{kn}|a_n(x)|/\rho(2^n))^2)^{1/2}w(x)||_E$ segue de (1), (18) e da Proposição IV.1.3 que

$$\begin{aligned} ||\sum_{F'} a_n(x)w(x)||_E &\leq CR\left(\frac{A_0(x)}{\varepsilon}, \frac{A_1(x)}{\varepsilon}\right) \leq CR\left(\frac{A_0(x)}{\varepsilon}, 1\right) \\ &= CR\left(\Phi_0^{-1}\left(\Phi_0\left(\frac{A_0(x)}{\varepsilon}\right)\right), 1\right) = C\Phi^{-1}\left(\Phi_0\left(\frac{A_0(x)}{\varepsilon}\right)\right) \end{aligned}$$

Usando agora (16) temos

$$\int_\Omega \Phi\left(\frac{1}{C\varepsilon}||\sum_{F'} a_n(x)w(x)||_E\right) d\mu \leq \int_\Omega \Phi_0\left(\frac{A_0(x)}{\varepsilon}\right) d\mu \leq 1$$

ou seja $||\sum_{F'} a_n||_{L^{\Phi}_{(w)}(E)} \leq C\varepsilon$, provando que $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ é somável em $L^{\Phi}_{(w)}(E)$ e pela primeira inclusão e o Teorema III.2.2 segue que $a = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n$ em $L^{\Phi}_{(w)}(E)$. Além disso, trocando ε por C_1 e usando (13) e (15) temos que $||\sum_F a_n||_{L^{\Phi}_{(w)}(E)} \leq C$. Passando o limite concluímos o Teorema.

O caso limite do Teorema 2.2 é o seguinte.

3.2. TEOREMA: Sejam Φ_0 uma função de Orlicz, w_0, w_1 dois pesos e E um reticulado de Banach com concavidade finita. Se $\rho(t) = t^\theta$, $0 < \theta < 1$, e Φ e w são definidos por $1 \leq p_0 < \infty$,

$$(1) \qquad \Phi^{-1} = (\Phi_0^{-1})^{1-\theta} \ , \ w = w_0^{1-\theta} w_1^\theta$$

então

$$(2) \qquad < L^{\Phi_0}_{(w_0)}(E), L^{\infty}_{(w_1)}(E) >_{\rho,p} = L^{\Phi}_{(w)}(E).$$

com equivalência de normas.

Demonstração. Seja $a \in L^{\Phi}_{(w)}(E)$ com $||a||_{L^{\Phi}_{(w)}(E)} \leq 1$, ou equivalentemente,

$$(3) \qquad \int_{\Omega} \Phi(||a(x)w(x)||_E)d\mu \leq 1.$$

Seja h definida por

$$(4) \qquad h(y) = y^{-\frac{1}{1-\theta}}.$$

Assim h é uma função contínua para $y > 0$, e segue de (1) que

$$(5) \qquad \Phi(y) = \Phi_0(yh(y)^{-\theta}).$$

Com efeito,

$$\begin{aligned} \Phi^{-1}(\Phi_0(yh(y)^{-\theta})) &= \Phi^{-1}(\Phi_0(y^{\frac{1}{1-\theta}})) \\ &= (\Phi_0^{-1}(\Phi_0(y^{\frac{1}{1-\theta}})))^{1-\theta} = y \end{aligned}$$

o que prova (5). Considerando para $n \in \mathbb{Z}$, $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ como no Teorema IV.2.2 com

$$B_n = \{x \in \Omega : \frac{w_0(x)}{w_1(x)} h(||a(x)w(x)||_E) \in [2^{n-1}, 2^n)\}$$

temos que $\Omega = \cup B_n$ e $B_n \cap B_m = \emptyset$ se $n \neq m$. Verifiquemos que $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ é uma sequência admissível para a. Para tanto notemos inicialmente que da definição de h temos $yh(y) = h(y)^{\theta}$ e então usando (5) temos que em B_n vale

$$(6) \qquad \begin{aligned} \Phi_0(||2^{-\theta n}a(x)w_0(x)||_E &\leq \Phi_0(||a(x)w(x)||_E h^{-\theta}(||a(x)w(x)||_E)) \\ &= \Phi(||a(x)w(x)||_E) \end{aligned}$$

e

$$(7) \qquad \begin{aligned} ||2^{(1-\theta)n}a(x)w_1(x)||_E &= 2^{1-\theta}||2^{(1-\theta)(n-1)}a(x)w_1(x)||_E \\ &\leq 2^{1-\theta}||a(x)w(x)||_E h^{1-\theta}(||a(x)w(x)||_E) = 2^{1-\theta} \end{aligned}$$

Seja $F \subset \mathbb{Z}$ um conjunto finito qualquer, então como no Teorema 2.2 mostramos que

$$(8) \qquad ||\sum_F \tilde{r}_n(\cdot)2^{-\theta n}a_n||_{L^p([0,1],L^{\Phi_0}_{(w_0)}(E))} \leq \sum_F \lambda_n$$

Por outro lado usando (7) temos que

$$||\frac{1}{2^{1-\theta}\sum_F \lambda_n}\sum_F \tilde{r}_n(t)2^{(1-\theta)n}a_n||_{L^\infty_{(w_1)}(E)} \leq$$
$$\leq \max_{n\in F}\sup_{x\in B_n}||\frac{\lambda_n}{\sum_F \lambda_n}2^{(1-\theta)(n-1)}a(x)w_1(x)||_E \leq 1$$

e então

$$(9) \qquad ||\sum_F \tilde{r}_n(\cdot)2^{(1-\theta)n}a_n||_{L^p([0,1],L^\infty_{(w_1)}(E))} \leq 2^{1-\theta}\sum_F \lambda_n.$$

Logo, segue de (8) e (9) que $a_n \in L^{\Phi_0}_{(w_0)}(E) \cap L^\infty_{(w_1)}(E)$, $(\tilde{r}_n(\cdot)2^{(k-\theta)n}a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ são somáveis em $L^{\Phi_0}_{(w_0)}(E)$ e $L^\infty_{(w_1)}(E)$ respectivamente para $k = 0, 1$ e

$$(10) \qquad \sup_F ||\sum_F \tilde{r}_n(\cdot)2^{-\theta n}a_n||_{L^p([0,1],L^{\Phi_0}_{(w_0)}(E))} \leq 1$$

e

$$(11) \qquad \sup_F ||\sum_F \tilde{r}_n(\cdot)2^{(1-\theta)n}a_n||_{L^p([0,1],L^\infty_{(w_1)}(E))} \leq 2^{1-\theta}.$$

Novamente como no Teorema 2.2 concluímos que $(a_n)_{n<0}$ é somável em $L^{\Phi_0}_{(w_0)}(E)$. Por outro lado se $F \subset \mathbb{Z}_+$ é finito temos usando novamente (7) que

$$||\frac{1}{\sum_F \lambda_n}\sum_F a_n||_{L^\infty_{(w_1)}(E)} \leq \max_{n\in F}\sup_{B_n}||\frac{\lambda_n}{\sum_F \lambda_n}2^{(1-\theta)(n-1)}a(x)w_1(x)||_E \leq 1$$

mostrando que $(a_n)_{n\geq 0}$ é $L^\infty_{(w_1)}(E)$-somável. Disto podemos concluir que $a = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n$ com convergência em $L^{\Phi_0}_{(w_0)}(E) + L^\infty_{(w_1)}(E)$. Desta forma demonstramos que $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ é uma sequência admissível para a e de (10) e (11) segue que

$$||a||_{<L^{\Phi_0}_{(w_0)}(E),L^\infty_{(w_1)}(E)>_{\rho,p}} \leq 2^{1-\theta}$$

mostrando que

$$L^\Phi_{(w)}(E) \hookrightarrow < L^{\Phi_0}_{(w_0)}(E), L^\infty_{(w_1)}(E) >_{\rho,p} .$$

Seja agora $a \in < L^{\Phi_0}_{(w_0)}(E), L^\infty_{(w_1)}(E) >_{\rho,p}$ com $||a||_{<L^{\Phi_0}_{(w_0)}(E),L^\infty_{(w_1)}(E)>_{\rho,p}} < 1$ e $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ uma sequência admissível para a tal que

$$(12) \qquad \sup_F ||\sum_F \tilde{r}_n(\cdot)2^{-\theta n}a_n||_{L^p([0,1],L^{\Phi_0}_{(w_0)}(E))} \leq 1$$

e

$$\sup_F \|\sum_F \tilde{r}_n(\cdot)2^{(1-\theta)n}a_n\|_{L^p([0,1],L^\infty_{(w_1)}(E))} \leq 1. \tag{13}$$

Agora usando a desigualdade de Khintchine-Maurey para E, segue de (12) e (13) que

$$\sup_F \|(\sum_F (2^{-\theta n}|a_n|)^2)^{1/2}\|_{L^{\Phi_0}_{(w_0)}(E)} \leq C_1 \tag{14}$$

e

$$\sup_F \|(\sum_F (2^{(1-\theta)n}|a_n|)^2)^{1/2}\|_{L^\infty_{(w_1)}(E)} \leq C_1. \tag{15}$$

Segue de (15) que se $F \subset \mathbb{Z}$ é finito então

$$\|(\sum_F (2^{(1-\theta)n}|a_n(x)|)^2)^{1/2}w_1(x)\|_E \leq C_1 \qquad \mu - \text{a.e.} \tag{16}$$

Agora como $(\tilde{r}_n(\cdot)2^{(k-\theta)n}a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ é $L^p([0,1],L^{\Phi_0}_{(w_0)}(E))$-somável e $L^p([0,1],L^\infty_{(w_1)}(E))$-somável para $k=0,1$ respectivamente, segue que dado $\varepsilon > 0$, existe $F_\varepsilon \subset \mathbb{Z}$ finito tal que se $F' \subset \mathbb{Z}$ é finito com $F' \cap F_\varepsilon = \emptyset$ então, após usarmos a desigualdade de Khintchine-Maurey para E, temos

$$\|(\sum_{F'} (2^{-\theta n}|a_n|)^2)^{1/2}\|_{L^{\Phi_0}_{(w_0)}(E)} \leq \varepsilon \tag{17}$$

e

$$\|(\sum_{F'} (2^{(1-\theta)n}|a_n|)^2)^{1/2}\|_{L^\infty_{(w_1)}(E)} \leq \varepsilon. \tag{18}$$

De (18) temos

$$\|(\sum_{F'} (2^{(1-\theta)n}|a_n(x)|)^2)^{1/2}w_1(x)\|_E \leq \varepsilon \qquad \mu - \text{a.e.} \tag{19}$$

A seguir vamos considerar $A_k(x) = \|(\sum_{F'} 2^{(k-\theta)n}|a_n(x)|)^2)^{1/2}w_k(x)\|_{E_k}$ e $A(x) = \max_{k=0,1} \Phi_k(A_k(x)/2\varepsilon)$. Temos usando (1), (19) e a Proposição IV.1.3 que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\varepsilon}\|\sum_{F'} a_n(x)w(x)\|_E &\leq C\left(\frac{A_0(x)}{\varepsilon}\right)^{1-\theta}\left(\frac{A_1(x)}{\varepsilon}\right)^{\theta} \\
&\leq C\left(\frac{A_0(x)}{\varepsilon}\right)^{1-\theta} = C\left(\Phi_0^{-1}\left(\Phi_0\left(\frac{A_0(x)}{\varepsilon}\right)\right)\right)^{1-\theta} \\
&= C\Phi^{-1}\left(\Phi_0\left(\frac{A_0(x)}{\varepsilon}\right)\right) \qquad \mu - \text{a.e.}
\end{aligned}$$

e então usando (17) temos

$$\int_\Omega \Phi\left(\frac{1}{C\varepsilon}\|\sum_{F'} a_n(x)w(x)\|_E\right)d\mu \leq \int_\Omega \Phi_0\left(\frac{A_0(x)}{\varepsilon}\right)d\mu \leq 1$$

ou seja, $\|\sum_{F'} a_n\|_{L^\Phi_{(w)}(E)} \leq C\varepsilon$, mostrando que $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ é somável em $L^\Phi_{(w)}(E)$ e pela primeira inclusão e o Teorema III.2.2 segue que $a = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n$ em $L^\Phi_{(w)}(E)$, ou seja, $a \in L^\Phi_{(w)}(E)$. Além disso, repetindo o processo acima, trocando ε por C_1 e usando (12) e (16) vamos obter que $\|\sum_F a_n\|_{L^\Phi_{(w)}(E)} \leq C$ e após passagem ao limite concluímos o Teorema.

CAPÍTULO VII

OS ESPAÇOS $B^{s,w}_{\Phi,q}$ E $F^{s,w}_{\Phi,q}$

No presente capítulo vamos definir os espaços de Besov-Triebel-Orlicz $B^{s,w}_{\Phi,q}$ e $F^{s,w}_{\Phi,q}$ onde Φ é uma função de Orlicz, w um peso, $1 \leq q \leq \infty$ e s é um parâmetro real. Um resultado preliminar que apresentaremos, e de fundamental importâcia no desenvolver da teoria, é um teorema de multiplicadores para os espaços de Orlicz $L^{\Phi}_{w}(\ell^{s}_{q})$. A seguir passaremos a definir os espaços de Besov-Triebel-Orlicz e apresentaremos algumas propriedades desses espaços. Finalmente, faremos uso dos resultados dos capítulos V e VI e de um teorema de retração para demonstrarmos os teoremas de interpolação para os espaços $B^{s,w}_{\Phi,q}$ e $F^{s,w}_{\Phi,q}$. Dentre esses teoremas aparecerá um que caracteriza os espaços de Besov-Triebel-Orlicz via interpolação dos espaços de Besov-Triebel usuais, que aparecem por exemplo em [24] (em particular os espaços de Sobolev-Orlicz são caracterizados como espaços de interpolação de espaços de Sobolev-L^p).

1. NOTAÇÕES

No que segue faremos uma exposição das notações que usaremos neste e no próximo capítulo.

1.1. Seja $x = (x_1, \cdots, x_n)$ um ponto do espaço Euclidiano n-dimensional $\mathbb{R}^n$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$, isto é, $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ e $\beta = (\beta_1, \cdots, \beta_n)$ com $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq n$. Definimos

$$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n,$$

$$\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!,$$

$$\alpha + \beta = (\alpha_1 + \beta_1, \cdots, \alpha_n + \beta_n)$$

e

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{pmatrix}$$

onde $\alpha \leq \beta$, isto é, $\alpha_i \leq \beta_i$, $i = 1, \cdots, n$. Para $x \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{N}^n$ colocaremos

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$$

Derivadas parciais serão denotadas por $\frac{\partial}{\partial x_j}$, $1 \leq j \leq n$, e para $\alpha \in I\!N^n$ colocaremos

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

1.2. Seja $U \subset I\!R^n$ um conjunto aberto. O espaço vetorial de todas as funções a valores complexos definidas em U que tem derivadas de todas as ordens será denotado por $C^\infty(U)$.

Para f, g em $C^\infty(U)$ vale a seguinte **regra de Leibnitz**

$$(1) \qquad D^\alpha(fg) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} (D^{\alpha-\beta} f)(D^\beta g)$$

1.3. Seja $f : U \subset I\!R^n \to \mathbb{C}$, onde U é um subconjunto aberto do corpo dos números complexos $\mathbb{C}$. Definimos o **suporte de** f e denotaremos supp f, o fecho em U do conjunto $\{x \in U : f(x) \neq 0\}$.

1.4. Por $C_c^\infty(U)$ denotaremos o espaço vetorial das funções de $C^\infty(U)$ que tem suporte compacto em U.

1.5. Se f, g são duas funções localmente integráveis em $I\!R^n$, com f ou g em $C_c^\infty(I\!R^n)$ então, $f * g$, a **convolução** de f e g, é definida por

$$(f * g)(x) = \int_{I\!R^n} f(x-y) g(y) dy = \int_{I\!R^n} f(y) g(x-y) dy$$

onde a integração é no sentido de Lebesgue.

1.6. **A classe de Schwartz** $\mathcal{S}(I\!R^n)$ é a classe das funções de decrescimento rápido, isto é, das funções $f \in C^\infty(I\!R^n)$ tais que

$$(1) \qquad P_{\alpha,\beta}(f) = \sup_{x \in I\!R^n} |x^\alpha D^\beta f(x)| \leq C_{\alpha,\beta} < \infty$$

para todos $\alpha, \beta \in I\!N^n$.

A familia de seminormas $(P_{\alpha,\beta})$ define uma topologia localmente convexa de Hausdorff em $\mathcal{S}(I\!R^n)$. Pode-se demonstrar também que tal topologia é metrizável e completa, e então $\mathcal{S}(I\!R^n)$ é um espaço de Frechet.

Uma sequência (ϕ_j) converge a zero em $\mathcal{S}(I\!R^n)$ se e somente se $x^\alpha D^\beta \phi_j(x) \to 0$ uniformemente em $I\!R^n$ para todo $\alpha, \beta \in I\!N^n$.

Tem-se as seguintes imersões contínuas

$$C_c^\infty(I\!R^n) \hookrightarrow \mathcal{S}(I\!R^n) \hookrightarrow C^\infty(I\!R^n)$$

As inclusões acima são densas.

1.7. A transformada de Fourier de uma função $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é definida por

$$\mathcal{F}f(x) = \hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x\cdot y} f(y)dy,$$

onde $x \cdot y = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$.

A transformada de Fourier define uma transformação linear contínua de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, com inversa definida por

$$\mathcal{F}^{-1}f(x) = \tilde{f}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x\cdot y} f(y)dy.$$

Temos também que $\mathcal{F}^{-1} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é contínua e portanto $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é um isomorfismo topológico.

Valem as seguintes propriedades para $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

(1) $$\widehat{f * g} = \hat{f} \cdot \hat{g}$$

e

(2) $$\widehat{f \cdot g} = \hat{f} * \hat{g}.$$

1.8. Os elementos de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, o dual topológico de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, são chamados **distribuições temperadas.** Se $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ e $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, então a ação de T em ϕ será denotada por $< T, \phi >$.

Cada função f pertencente a um espaço de Orlicz $L^\Phi(\mathbb{R}^n)$ define uma distribuição temperada quando colocamos

(1) $$< f, \phi >= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\phi(x)dx\,, \qquad (\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)).$$

De fato, temos pela desigualdade de Hölder que

$$| < f, \phi > | \leq ||f||_{L^\Phi} ||\phi||_{L^{\Phi^*}}.$$

Agora, observando que se uma sequência (ϕ_j) converge a zero em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ela converge a zero também em L^Φ, concluímos que cada $f \in L^\Phi$ define um funcional linear contínuo em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

1.9. Se $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, sua transformada de Fourier, é a distribuição temperada definida por

(1) $$< \hat{T}, \phi >=< \mathcal{F}T, \phi >=< T, \hat{\phi} >\,, \qquad (\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)).$$

Analogamente a transformada inversa é definida por

(2) $$< \tilde{T}, \phi > = < \mathcal{F}^{-1} T, \phi > = < T, \tilde{\phi} > , \qquad (\phi \in \mathcal{S}(I\!\!R^n)).$$

Temos também que $\mathcal{F} : \mathcal{S}'(I\!\!R^n) \to \mathcal{S}'(I\!\!R^n)$ é um isomorfismo.

1.10. Seja $T \in \mathcal{S}'(I\!\!R^n)$. O suporte de T, supp T, é definido como o complementar do maior subconjunto aberto do $I\!\!R^n$ onde T é zero. Se $T \in \mathcal{S}'(I\!\!R^n)$ e $\widehat{T}$ tem suporte compacto, então pelo Teorema de Paley-Wiener-Schwartz (ver [13], [26] ou [32]), segue que $T = T(x)$ é uma função analítica, e então pode ser representada como em 1.8(1).

1.11. Para $\phi \in \mathcal{S}(I\!\!R^n)$ e $T \in \mathcal{S}'(I\!\!R^n)$ o produto $\phi T \in \mathcal{S}'(I\!\!R^n)$ é definido por

$$< \phi T, \psi > = < T, \phi\psi > \qquad (\ \psi \in \mathcal{S}(I\!\!R^n)\ )$$

e a convolução $\phi * T = T * \phi$ é dada por

$$< \phi * T, \psi > = < T, \check{\phi} * \psi > \qquad (\ \psi \in \mathcal{S}(I\!\!R^n)\ )$$

onde $\check{\phi}(x) = \phi(-x)$.

Para maiores detalhes a respeito do que foi explanado acima sugerimos as referências [15], [26], etc.

2. UM TEOREMA DE MULTIPLICADORES PARA $L^{\Phi}_{(w)}(\ell^s_q)$

2.1. Sejam E um espaço de Banach, $1 \le q \le \infty$ e $s \in I\!\!R$. O seguinte espaço sequencial com peso será bastante utilizado

$$\ell^s_q(E) = \{(a_j)_{j\ge 0} \subset E : (2^{js}||a_j||_E)_{j\ge 0} \in \ell_q\}.$$

O espaço $\ell^s_q(E)$ torna-se um espaço de Banach quando munido da norma

$$||(a_j)_{j\ge 0}||_{\ell^s_q(E)} = ||(2^{js}||a_j||_E)_{j\ge 0}||_{\ell_q} = (\sum_{j=0}^{\infty}(2^{js}||a_j||_E)^q)^{1/q}$$

Quando $E = I\!\!R$ usaremos a notação ℓ^s_q.

2.2. Seja Φ uma função de Orlicz e w um peso. Denotaremos por L^{Φ}_w o espaço de Orlicz $L^{\Phi}(I\!\!R^n, d\mu)$ onde $d\mu(x) = w(x)dx$.

Estaremos interessados na situação em que o peso w se encontra na classe de Muckenhoupt A_p.

2.3. Diz-se que um peso $w : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ pertence à classe A_p, $1 < p < \infty$, e escreve-se $w \in A_p$, se

$$(1) \qquad \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)dx\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)^{-\frac{1}{p-1}}dx\right)^{p-1} \leq C$$

para todo cubo Q do $\mathbb{R}^n$.

2.4. PROPOSIÇÃO: Se $w \in A_p$ então
(a) w é localmente integrável ,
(b) existe q com $1 < q < p$ tal que $w \in A_q$,
(c) $w \in A_q$ para todo q tal que $p < q < \infty$,
(d) existe $\varepsilon > 0$ tal que $w^{1+\varepsilon} \in A_p$, e
(e) se $0 < \varepsilon < 1$ temos que $w^\varepsilon \in A_{\varepsilon p+1-\varepsilon}$.

A definição 2.3 pode ser extendida para funções de Orlicz .

2.5. DEFINIÇÃO: Se Φ é uma função de Orlicz diz-se que um peso $w : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ pertence á classe A_Φ, e escreve-se $w \in A_\Phi$, se

$$(1) \qquad \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)dx\right)\varphi\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \varphi^{-1}\left(\frac{1}{w(x)}\right)dx\right) \leq C$$

para todo cubo Q do $\mathbb{R}^n$, onde φ é a função densidade de Φ.

Em [14], R.A.Kerman e A.Torchinsky demonstraram a seguinte equivalência

2.6. PROPOSIÇÃO: Seja $w : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ localmente integrável e Φ uma função de Orlicz que juntamente com sua conjugada satisfaçam a condição-Δ_2. Então $w \in A_\Phi$ se e somente se $w \in A_{q_\Phi}$.

Passemos agora ao teorema de multiplicadores para os espaços $L^\Phi_w(\ell^s_q)$. Vamos denotar por ℓ^∞_0 o espaço das sequências de números reais que são nulos a menos de uma quantidade finita de índices, e por $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \ell^\infty_0)$ o espaço das quase-nulas sequências de funções de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

2.7. TEOREMA: Seja $M(t) = (m_{ij}(t))_{-\infty<i,j<\infty}$ uma matriz com $m_{ij} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Assuma que m_{ij} é de classe C^k fora da origem, com $k = [n/2]$, e satisfaz

$$(1) \qquad \int_{\frac{R}{2}\leq|t|\leq 2R} \sum_{i,j=-\infty}^{\infty} |D^\alpha m_{i\,j}(t)|^2 dt \leq CR^{n-2|\alpha|}$$

para cada multi-indice α tal que $|\alpha| \leq k$. Se Φ é uma função de Orlicz que juntamente com sua conjugada satisfazem a condição-Δ_2 e se $w \in A_{q_\Phi k/n}$, $n/k < q_\Phi < \infty$, então o operador T_M dado por

(2) $$(T_M F)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{M}(x-y)F(y)dy \qquad , \ (F = (f_j)_{j\geq 0} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \ell_0^\infty)) ,$$

onde $\widetilde{M} = (\widetilde{m}_{i\,j})_{i,j}$ e $\widetilde{m}_{i\,j}(t) = \widehat{m}_{i\,j}(-t)$, aplica (após extensão) $L^\Phi_w(\ell^s_2)$ em $L^\Phi_w(\ell^s_2)$, e temos que $||T_M|| \leq \beta C$ onde β depende somente de Φ e n. Além disso, se

(3) $$m_{i\,j} = 0 \ , \ \text{para } \ i \neq j \ ,$$

então T_M aplica (após extensão) $L^\Phi_w(\ell^s_q)$ em $L^\Phi_w(\ell^s_q)$ para todo $1 < q < \infty$, com $||T_M|| \leq \gamma C$ onde γ depende somente de Φ, q e n.

Demonstração. Dado $w \in A_{q_\Phi k/n}$, podemos escolher r tal que $1 < r < q_\Phi k/n$ e $w \in A_r$ (Proposição 2.4(b)). Tomemos $\rho \in \mathcal{P}^{+-}$, p_0, p_1 com

$$1 < p_1 \leq rn/k < q_\Phi \leq p_\Phi < p_0 < \infty$$

tal que $w \in A_{p_i k/n}$, $i = 0, 1$, e o Teorema V.1.2 seja verdadeiro com a medida $d\mu(x) = w(x)dx$ e $E = \ell^s_q$, isto é,

(4) $$< L^{p_0}_w(\ell^s_q), L^{p_1}_w(\ell^s_q) >_{\rho,p} = L^\Phi_w(\ell^s_q) .$$

Agora a demonstração segue de (4) e [6, Teorema 5].

2.8. OBSERVAÇÃO: No Teorema 5 de [6] o resultado continua ainda verdadeiro se exigirmos maior regularidade para $m_{i\,j}$. Por exemplo, se $m_{i\,j}$ é de classe C^∞ podemos tomar o peso w na classe A_p. Então no Teorema 2.7, se considerarmos $m_{i\,j}$ na classe C^∞ podemos tomar o peso w na classe A_Φ.

3. DEFINIÇÃO E PROPRIEDADES DE $B^{s,w}_{\Phi,q}$ E $F^{s,w}_{\Phi,q}$

3.1. DEFINIÇÃO: Seja $\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ a coleção de todos os sistemas $\phi = (\phi_j)_{j\geq 0} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tais que $\widehat{\phi}_j(x) \geq 0$, $j = 0, 1, \cdots$, e (1), (2) e (3) abaixo são verificados,

(1) $$\begin{cases} \text{supp } \widehat{\phi}_0 = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ |x| \leq 2\} \\ \text{supp } \widehat{\phi}_j = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ 2^{j-1} \leq |x| \leq 2^{j+1}\} \quad \text{para } j = 1, 2, \cdots . \end{cases}$$

Para cada multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^n$, existe um número positivo C_α tal que

(2) $$|D^\alpha \widehat{\phi}_j(x)| \leq C_\alpha 2^{-j|\alpha|} \ ,$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $j = 0, 1, \cdots$ e

(3) $$\sum_{j=0}^{\infty} \widehat{\phi}_j(x) = 1 \qquad (x \in \mathbb{R}^n) .$$

Vamos verificar que $\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ é não-vazio.

3.2. PROPOSIÇÃO: Existe um sistema $\phi = (\phi_j)_{j\geq 0} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\widehat{\phi}_j(x) \geq 0$ e 3.1(1)-(3) são verificadas.

Demonstração. Segue do Lema 6.1.7 de [B-L] que existe $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ com $\widehat{\psi}(x) \geq 0$ satisfazendo

(1) $$\operatorname{supp} \widehat{\psi} = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ 2^{-1} \leq |x| \leq 2\},$$

(2) $$\widehat{\psi}(x) > 0 \quad \text{se} \quad 2^{-1} < |x| < 2$$

e

(3) $$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{\psi}(2^{-k}x) = 1 \quad \text{se} \quad x \neq 0$$

Definimos o sistema $\phi = (\phi_j)_{j\geq 0}$ por

(4) $$\begin{cases} \widehat{\phi}_j(x) = \widehat{\psi}(2^{-j}x) \ \text{ se } \ j = 1,2,\cdots , \\ \widehat{\phi}_0(x) = 1 - \sum_{j=1}^{\infty} \widehat{\phi}_j(x) , \end{cases}$$

Vamos supor $j = 1,2,\cdots$ e tomemos $x \in \operatorname{supp} \widehat{\phi}_j$. Então existe $(x_i)_{i\geq 0} \subset \mathbb{R}^n$ com $x_i \to x$ e $\widehat{\phi}_j(x_i) = \widehat{\psi}(2^{-j}x_i) \neq 0$. Segue então de (1) que $2^{j-1} \leq |x_i| \leq 2^{j+1}$ e então $2^{j-1} \leq |x| \leq 2^{j+1}$, ou seja

(5) $$\operatorname{supp} \widehat{\phi}_j \subset \{x \in \mathbb{R}^n : 2^{j-1} \leq |x| \leq 2^{j+1}\}.$$

Vamos considerar agora x tal que $2^{j-1} \leq |x| \leq 2^{j+1}$. Então $\frac{1}{2} \leq |2^{-j}x| \leq 2$, ou seja, $2^{-j}x \in \operatorname{supp} \widehat{\psi}$ e assim existe uma sequência $(x_i)_{i\geq 0}$ com $\widehat{\psi}(x_i) \neq 0$ e $x_i \to 2^{-j}x$, ou equivalentemente, $2^j x_i \to x$. Se $y_i = 2^j x_i$ então $\widehat{\phi}_j(y_i) = \widehat{\psi}(2^{-j}y_i) = \widehat{\psi}(x_i) \neq 0$ e $y_i \to x$, mostrando que $x \in \operatorname{supp} \widehat{\phi}_j$ e consequentemente

(6) $$\{x \in \mathbb{R}^n : 2^{j-1} \leq |x| \leq 2^{j+1}\} \subset \operatorname{supp} \widehat{\phi}_j.$$

Suponhamos agora que $|x| > 2$. Notemos que se $j \leq 0$ temos $|2^{-j}x| > 2^{-j+1} \geq 2$, e usando (1) temos que $\widehat{\psi}(2^{-j}x) = 0$. Agora segue de (3) que $\sum_{j=1}^{\infty} \widehat{\phi}_j(x) = 1$ e então $\widehat{\phi}_0(x) = 0$, implicando em

(7) $$\operatorname{supp} \widehat{\phi}_0 \subset \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 2\}.$$

A seguir consideremos x tal que $0 < |x| < 2$. Se $j > 2$, $|2^{-j}x| < 2^{-j+1} < \frac{1}{2}$ e então $\widehat{\psi}(2^{-j}x) = 0$. Logo

(8) $$\widehat{\phi}_0(x) = 1 - \sum_{j=1}^{2} \widehat{\phi}_j(x).$$

Por outro lado, para $0 < |x| < 2$ e $|x| \neq 1$, existe $j < 1$ tal que $2^{j-1} < |x| < 2^{j+1}$. Com efeito, se $1 < |x| < 2$ temos que $j = 0$ serve. Suponhamos então $0 < |x| < 1$ e tomemos j tal que

(9) $$j - 1 < \log_2 |x| < j + 1.$$

Como $\log_2 |x| < 0$, segue de (9) que $j < 1$ e $2^{j-1} < |x| < 2^{j+1}$. Temos também que para $0 < |x| < 2$,

(10) $$1 = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \widehat{\psi}(2^{-j}x) = \sum_{j=-\infty}^{2} \widehat{\psi}(2^{-j}x) = \sum_{j=-\infty}^{0} \widehat{\psi}(2^{-j}x) + \widehat{\phi}_1(x) + \widehat{\phi_2}(x)$$

Segue da observação acima e de (1) que se $|x| \neq 1$, $0 < |x| < 2$ então $\sum_{j=-\infty}^{0} \widehat{\psi}(2^{-j}x) > 0$. Assim usando (10) temos que $\widehat{\phi}_0(x) + \widehat{\phi}_1(x) < 1$ e segue de (8) que $\widehat{\phi}_0(x) \neq 0$ se $0 < |x| < 2$ e $|x| \neq 1$, ou seja $\{x \in \mathbb{R}^n : |x| \neq 1 \text{ e } 0 < |x| < 2\} \subset \{x \in \mathbb{R}^n : \widehat{\phi}_0(x) \neq 0\}$. Tomando o fecho, temos

(11) $$\{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 2\} \subset \operatorname{supp} \widehat{\phi}_0$$

Desta forma, usando (5), (6), (7) e (11) fica demonstrado 3.1(1). Além disso, 3.1(3) segue imediatamente de (4). Finalmente se $j = 1, 2, \cdots$ temos que

(12) $$|D^\alpha \widehat{\phi}_j(x)| = |D^\alpha(\widehat{\psi}(2^{-j}x))| = 2^{-j|\alpha|}|(D^\alpha \widehat{\psi})(2^{-j}x)|$$

Mas, como $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ temos que existe C_α tal que $|(D^\alpha \widehat{\psi})(2^{-j}x)| \leq C_\alpha$. Logo

(13) $$|D^\alpha \widehat{\phi}_j(x)| \leq C_\alpha 2^{-j|\alpha|} \quad j = 1, 2, \cdots.$$

Por outro lado, se $|x| > 2$ então $\widehat{\phi}_0(x) = 0$ o que implica em $|D^\alpha \widehat{\phi}_0(x)| = 0$ e se $|x| \leq 2$ temos que $\widehat{\phi}_0(x) = 1 - \widehat{\phi}_1(x)$, e então $|D^\alpha \widehat{\phi}_0(x)| = |D^\alpha \widehat{\phi}_1(x)| \leq C_\alpha$. De qualquer modo temos

(14) $$|D^\alpha \widehat{\phi}_0(x)| \leq C_\alpha$$

Assim, (13) e (14) demonstram 3.1(2) e com isto fica demonstrada a Proposição.

Podemos agora formular nossas definições básicas. Consideremos então $w : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ um peso, $1 \leq q \leq \infty$, $s \in \mathbb{R}$, Φ uma função de Orlicz e $\phi = (\phi_j)_{j \geq 0} \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$.

3.3. DEFINIÇÃO: Os espaços de **Besov-Orlicz** e **Triebel-Orlicz com peso** são definidos respectivamente por

$$B^{s,w}_{\Phi,q} = \{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \; : \; ||f||^{\phi}_{B^{s,w}_{\Phi,q}} = ||(\phi_j * f)_{j\geq 0}||_{\ell^s_q(L^{\Phi}_w)} < \infty\}$$

e

$$F^{s,w}_{\Phi,q} = \{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \; : \; ||f||^{\phi}_{F^{s,w}_{\Phi,q}} = ||(\phi_j * f)_{j\geq 0}||_{L^{\Phi}_w(\ell^s_q)} < \infty\} \, ,$$

com as interpretações usuais quando $q = \infty$.

3.4. OBSERVAÇÃO: Quando $\Phi(t) = t^p$, $1 < p < \infty$, temos que $B^{s,w}_{\Phi,q}$ e $F^{s,w}_{\Phi,q}$ são os espaços $B^{s,w}_{p,q}$ e $F^{s,w}_{p,q}$ que aparecem em [24].

3.5. PROPOSIÇÃO: Os espaços $B^{s,w}_{\Phi,q}$ e $F^{s,w}_{\Phi,q}$ são espaços vetoriais normados.

Demonstração. A única dificuldade está em mostrar que

(1) $$||f||^{\phi}_{B^{s,w}_{\Phi,q}} = 0 \quad (\text{ou } ||f||^{\phi}_{F^{s,w}_{\Phi,q}} = 0)$$

implica em $f = 0$. Se (1) ocorrer segue que $\phi_j * f = 0$ em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Vamos considerar $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ qualquer e $\xi_i = \sum_{j=0}^{i} \widehat{\phi}_j$. Como $(\phi_j)_{j\geq 0} \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ segue que

$$\xi_j(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } |x| < 2^j \\ \widehat{\phi}_j(x) & \text{se } 2^j \leq |x| \leq 2^{j+1} \\ 0 & \text{se } |x| > 2^j \end{cases}$$

Assim, usando a regra de Leibnitz temos

$$\begin{aligned} P_{\alpha,\beta}(\xi_j\psi - \psi) &= \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta(\xi_j\psi - \psi)(x)| \\ &= \sup_{|x|\geq 2^j} |x^\alpha D^\beta(\, ((\xi_j - 1)\psi)(x)| \\ &= \sup_{|x|\geq 2^j} |x^\alpha \sum_{\gamma\leq\beta} \frac{\beta!}{(\beta-\gamma)!\gamma!} D^{\beta-\gamma}(\xi_j - 1)(x) D^\gamma\psi(x)| \\ &\leq \sum_{\gamma\leq\beta} \frac{\beta!}{(\beta-\gamma)!\gamma!} \sup_{2^j\leq|x|\leq 2^{j+1}} |D^{\beta-\gamma}\widehat{\phi}_j(x)||x^\alpha D^\gamma\psi(x)| \end{aligned}$$

Mas como $(\phi_j)_{j\geq 0} \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ segue de 3.1(2) que para todo $x \in \mathbb{R}^n$ temos

(2) $$|D^{\beta-\gamma}\widehat{\phi}_j(x)| \leq C_{\beta,\gamma} 2^{-j|\beta-\gamma|}$$

Por outro lado, como $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, segue de 1.6(1) que para todo $x \in \mathbb{R}^n$

(3) $$|x^\alpha D^\gamma \psi(x)| \leq C_{\alpha,\gamma}$$

Logo, usando (2) e (3) temos que

$$P_{\alpha,\beta}(\xi_j\psi - \psi) \leq \sum_{\gamma\leq\beta} \frac{\beta!}{(\beta-\gamma)!\gamma!} C_{\beta,\gamma}C_{\alpha,\gamma}2^{-j|\beta-\gamma|}$$

o que mostra que $P_{\alpha,\beta}(\xi_j\psi - \psi) \to 0$ quando $j \to \infty$. Então $\xi_j\psi \to \psi$ em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Agora, como $\phi_j * f = 0$ segue que $\sum_{j=0}^{i} \phi_j * f = 0$ e então

$$0 = \widehat{\sum_{j=0}^{i} \phi_j * f} = \sum_{j=0}^{i} \widehat{\phi_j * f} = \sum_{j=0}^{i} \widehat{\phi_j} \cdot \widehat{f}$$

Consequentemente se $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é qualquer, então

$$0 = <\sum_{j=0}^{i} \widehat{\phi_j} \cdot \widehat{f}, \psi> = <\widehat{f}, \sum_{j=0}^{i} \widehat{\phi_j} \cdot \psi> \to <\widehat{f}, \psi>$$

ou seja, $<\widehat{f}, \psi> = 0$ para toda $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, mostrando finalmente que $f = 0$.

Na definição da norma dos espaços $B^{s,w}_{\Phi,q}$ e $F^{s,w}_{\Phi,q}$ vimos a ação direta do sistema $\phi \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$. Contudo, se usarmos um outro sistema teremos uma equivalência das normas obtidas. É o que demonstraremos no próximo resultado.

3.6. PROPOSIÇÃO: Sejam $\phi = (\phi_j)_{j\geq 0}$ e $\psi = (\psi_j)_{j\geq 0}$ dois sistemas em $\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$. Então se Φ é uma função de Orlicz que juntamente com sua conjugada satisfazem a condição-Δ_2 e $w \in A_\Phi$, temos que

(1) $$||f||^{\phi}_{B^{s,w}_{\Phi,q}} \sim ||f||^{\psi}_{B^{s,w}_{\Phi,q}} \qquad (\, 1 \leq q \leq \infty \,)$$

e

(2) $$||f||^{\phi}_{F^{s,w}_{\Phi,q}} \sim ||f||^{\psi}_{F^{s,w}_{\Phi,q}} \qquad (\, 1 < q < \infty \,)$$

Demonstração. Tendo em vista as hipóteses para o suporte de $\widehat{\psi}_j$ temos que se $x \in \operatorname{supp} \widehat{\psi}_j$ então $\widehat{\psi}_k(x) = 0$ para $k < j-1$ e $k > j+1$. Logo

$$1 = \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{\psi}_k(x) = \sum_{r=-1}^{1} \widehat{\psi}_{j+r}(x) \qquad (\psi_{-1} \equiv 0)$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\widehat{\phi}_j(x) &= \widehat{\phi}_j(x)\sum_{r=-1}^{1}\widehat{\psi}_{j+r}(x) = \sum_{r=-1}^{1}\widehat{\phi}_j(x)\widehat{\psi}_{j+r}(x)\\
&= \sum_{r=-1}^{1}(\widehat{\phi_j * \psi_{j+r}})(x) = (\widehat{\sum_{r=-1}^{1}\phi_j * \psi_{j+r}})(x)
\end{aligned}$$

o que mostra que $\phi_j = \sum_{r=-1}^{1}\phi_j * \psi_{j+r}$. Então se $f \in \mathcal{S}'(I\!R^n)$ temos que

$$\phi_j * f = \sum_{r=-1}^{1}\phi_j * \psi_{j+r} * f \tag{3}$$

Para demonstrar (1) vamos utilizar o Teorema 2.7 com $(m_{i\,j})$ definida por $m_{1\,1}(t) = \widehat{\phi}_j(t)$, $m_{i\,j} = 0$ se $i \neq 1 \neq j$ e $F = (f_j)$ definida por $f_1 = \psi_{j+r} * f$ e $f_j = 0$ se $j \neq 1$. Notando que

$$|D^\alpha \widehat{\phi}_j(x)| \leq C_\alpha |x|^{-|\alpha|}$$

segue que $\widehat{\phi}_j$ satisfaz 2.7(1) e 2.7(3), e então segue da Observação 2.8 que o operador $T_M =$ **convolução com** ϕ_j é contínuo (após extensão) de $L^\Phi_w(\ell^s_q)$ em $L^\Phi_w(\ell^s_q)$, ou seja

$$\begin{aligned}
\|T_M F\|_{L^\Phi_w(\ell^s_q)} &= \|\phi_j * \psi_{j+r} * f\|_{L^\Phi_w}\\
&\leq C\|\psi_{j+r} * f\|_{L^\Phi_w}
\end{aligned}$$

com constante C dependendo somente de Φ e n. Desta forma

$$\begin{aligned}
\|(\phi_j * \psi_{j+r} * f)_{j\geq 0}\|_{\ell^s_q(L^\Phi_w)} &= (\sum_{j=0}^{\infty}(2^{js}\|\phi_j * \psi_{j+r} * f\|_{L^\Phi_w})^q)^{1/q}\\
&\leq (\sum_{j=0}^{\infty}(2^{js}C\|\psi_{j+r} * f\|_{L^\Phi_w})^q)^{1/q}\\
&\leq C\|(\psi_{j+r} * f)_{j\geq 0}\|_{\ell^s_q(L^\Phi_w)}
\end{aligned} \tag{4}$$

Usando (3) e (4) vemos que

$$\|(\phi_j * f)_{j\geq 0}\|_{\ell^s_q(L^\Phi_w)} \leq C\sum_{r=-1}^{1}\|(\psi_{j+r} * f)_{j\geq 0}\|_{\ell^s_q(L^\Phi_w)} \tag{5}$$

Consequentemente,

$$\|f\|^\phi_{B^{s,w}_{\Phi,q}} \leq 3C\|f\|^\psi_{B^{s,w}_{\Phi,q}} \tag{6}$$

Como os sistemas $(\phi_j)_{j\geq 0}$ e $(\psi_j)_{j\geq 0}$ são arbitrários a equivalência (1) segue de (6). Agora para demonstrarmos (2) vamos considerar $(m_{i\,j})$ e (f_j) definidas por

$$m_{i\,j}(x) = \begin{cases} \widehat{\phi_j}(x) & \text{se } i = j = 0, 1, \cdots \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

e

$$f_j(x) = \begin{cases} (\psi_{j+r} * f)(x) & \text{se } j = 0, 1, \cdots \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Segue da Definição 3.1 que

$$(\sum_{j=0}^{\infty} |D^\alpha \widehat{\phi}_j(x)|^2)^{1/2} \leq C|x|^{-|\alpha|}$$

o que mostra que 2.7(1) é satisfeito e então

$$\|(\phi_j * \psi_{j+r} * f)\|_{L^\Phi_w(\ell^s_q)} \leq C\|(\psi_{j+r} * f)\|_{L^\Phi_w(\ell^s_q)} \tag{7}$$

com constante dependendo somente de Φ, n e q. Usando a seguir (3) e (7) temos que

$$\|(\phi_j * f)\|_{L^\Phi_w(\ell^s_q)} \leq C \sum_{r=-1}^{1} \|(\psi_{j+r} * f)\|_{L^\Phi_w(\ell^s_q)} \tag{8}$$

o que implica que

$$\|f\|^{\phi}_{F^{s,w}_{\Phi,q}} \leq 3C\|f\|^{\psi}_{F^{s,w}_{\Phi,q}} \tag{9}$$

Logo, (2) segue de (9) e da arbitrariedade dos sistemas.

3.7. OBSERVAÇÕES: 1.) Em tudo o que segue vamos considerar as funções de Orlicz, bem como suas conjugadas, satisfazendo a condição-Δ_2. Consideraremos também o peso w sempre na classe de Muckenhoupt modelada em funções de Orlicz (classe A_Φ).
2.) Em vista da Proposição 3.6 vamos trocar a notação $\|\cdot\|^{\phi}_{B^{s,w}_{\Phi,q}}$ (resp. $\|\cdot\|^{\phi}_{F^{s,w}_{\Phi,q}}$) por $\|\cdot\|_{B^{s,w}_{\Phi,q}}$ (resp. $\|\cdot\|_{F^{s,w}_{\Phi,q}}$).

A seguir estudaremos algumas imersões dos espaços $B^{s,w}_{\Phi,q}$ e $F^{s,w}_{\Phi,q}$.

3.8. TEOREMA: (i) Se $-\infty < s_0 \leq s_1 < \infty$ e $1 \leq q \leq \infty$ então

$$B^{s_1,w}_{\Phi,q} \hookrightarrow B^{s_0,w}_{\Phi,q} \text{ e } F^{s_1,w}_{\Phi,q} \hookrightarrow F^{s_0,w}_{\Phi,q}\,. \tag{1}$$

(ii) Se $1 \leq q_0 \leq q_1 \leq \infty$ e $-\infty < s < \infty$ então

(2) $$B^{s,w}_{\Phi,q_0} \hookrightarrow B^{s,w}_{\Phi,q_1} \text{ e } F^{s,w}_{\Phi,q_0} \hookrightarrow F^{s,w}_{\Phi,q_1} .$$

(iii) Se $\varepsilon > 0$, $1 \le q_0, q_1 \le \infty$ e $-\infty < s < \infty$ então

(3) $$B^{s+\varepsilon,w}_{\Phi,q_0} \hookrightarrow B^{s+\varepsilon,w}_{\Phi,q_1} \text{ e } F^{s+\varepsilon,w}_{\Phi,q_0} \hookrightarrow F^{s+\varepsilon,w}_{\Phi,q_1} .$$

(iv) Se $-\infty < s_0 \le s_1 < \infty$ então

(4) $$B^{s_1,w}_{\Phi,\infty} \hookrightarrow B^{s_0,w}_{\Phi,1} \text{ e } B^{s_1,w}_{\Phi,\infty} \hookrightarrow F^{s_0,w}_{\Phi,1} .$$

(v) Se $-\infty < s_0 \le s_1 < \infty$ e $1 \le q \le \infty$ então

(5) $$B^{s_1,w}_{\Phi,q} \hookrightarrow F^{s_0,w}_{\Phi,q} .$$

Demonstração. (1) e (2) seguem do carater monótono das normas dos espaços ℓ^s_q e L^Φ_w. Para demonstrar (3) suponhamos inicialmente que $1 \le q_1 < \infty$. Temos então que

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{j=0}^{\infty}(2^{js}||\phi_j * f||_{L^\Phi_w})^{q_1}\right)^{1/q_1} &= \left(\sum_{j=0}^{\infty}(2^{j(s+\varepsilon)}||\phi_j * f||_{L^\Phi_w} 2^{-j\varepsilon})^{q_1}\right)^{1/q_1} \\
&\le \sup_j 2^{j(s+\varepsilon)}||\phi_j * f||_{L^\Phi_w}(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j\varepsilon q_1})^{1/q_1} \\
&= C \sup_j 2^{j(s+\varepsilon)}||\phi_j * f||_{L^\Phi_w}
\end{aligned}$$

o que mostra que

(6) $$B^{s+\varepsilon,w}_{\Phi,\infty} \hookrightarrow B^{s,w}_{\Phi,q_1} .$$

Mas por (2) e (6) concluímos que $B^{s+\varepsilon,w}_{\Phi,q_0} \hookrightarrow B^{s,w}_{\Phi,q_1}$. Agora supondo $q_1 = \infty$ segue de (1) que $B^{s+\varepsilon,w}_{\Phi,\infty} \hookrightarrow B^{s,w}_{\Phi,\infty}$ e usando novamente (2) temos $B^{s+\varepsilon,w}_{\Phi,q_0} \hookrightarrow B^{s,w}_{\Phi,\infty}$. Analogamente vale $F^{s+\varepsilon,w}_{\Phi,q_0} \hookrightarrow F^{s,w}_{\Phi,q_1}$. Passemos agora à demonstração de (4). Desde que $s_0 - s_1 < 0$, temos

$$\begin{aligned}
||f||_{B^{s_0,w}_{\Phi,1}} &= \sum_{j=0}^{\infty} 2^{js_0}||\phi_j * f||_{L^\Phi_w} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} 2^{j(s_0-s_1)}2^{js_1}||\phi_j * f||_{L^\Phi_w} \\
&\le \sum_{j=0}^{\infty} 2^{j(s_0-s_1)} \sup_j 2^{js_1}||\phi_j * f||_{L^\Phi_w} \\
&= C||f||_{B^{s_1,w}_{\Phi,\infty}} .
\end{aligned}$$

Da mesma forma temos

$$\begin{aligned}
||f||_{F^{s_0,w}_{\Phi,1}} &= ||\sum_{j=0}^{\infty} 2^{js_0}|\phi_j * f|\,||_{L^\Phi_w} \\
&\leq \sum_{j=0}^{\infty} 2^{j(s_0-s_1)} 2^{js_1} ||\phi_j * f||_{L^\Phi_w} \\
&\leq \sum_{j=0}^{\infty} 2^{j(s_0-s_1)} \sup_j 2^{js_1} ||\phi_j * f||_{L^\Phi_w} \\
&= C||f||_{B^{s_1,w}_{\Phi,\infty}} .
\end{aligned}$$

o que demonstra (4). Usando (2) e (4) demonstramos (5). Com efeito,

$$B^{s_1,w}_{\Phi,q} \overset{(2)}{\hookrightarrow} B^{s_1,w}_{\Phi,\infty} \overset{(4)}{\hookrightarrow} F^{s_0,w}_{\Phi,1} \overset{(2)}{\hookrightarrow} F^{s_0,w}_{\Phi,q}.$$

4. TEOREMA DE CARACTERIZAÇÃO E CONSEQUÊNCIAS

Neste parágrafo desenvolveremos um teorema que caracteriza os espaços $B^{s,w}_{\Phi,q}$ e $F^{s,w}_{\Phi,q}$ via interpolação dos espaços $B^{s,w}_{p,q}$ e $F^{s,w}_{p,q}$ com o auxílio de uma ferramenta chamada retração. Vamos à definição e aos resultados auxiliares.

4.1. DEFINIÇÃO: Um espaço vetorial normado E é uma **retração** de um outro espaço vetorial normado F, se existirem aplicações lineares contínuas $R : E \to F$ e $S : F \to E$ tais que $S \circ R = I\!I_E$, onde $I\!I_E$ é a aplicação identidade de E.

4.2. LEMA: Seja $\phi = (\phi_j)_{j\geq 0} \in \mathcal{O}(I\!R^n)$ e suponha que $(\alpha_j)_{j\geq 0} \in \ell^s_q(L^\Phi_w)$ ou $(\alpha_j)_{j\geq 0} \in L^\Phi_w(\ell^s_q)$ com $1 \leq q \leq \infty$. Então colocando $\psi_j = \sum_{r=-1}^{1} \phi_{j+r}$ $(\psi_{-1} \equiv 0)$, teremos que $\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j * \alpha_j$ converge em $\mathcal{S}'(I\!R^n)$.

Demonstração. Vamos supor inicialmente que $\Phi(t) = t^p$, $1 < p < \infty$. Suponhamos também que $(\alpha_j)_{j\geq 0} \in \ell^s_q(L^p_w)$ e $\xi \in \mathcal{S}(I\!R^n)$ é arbitrário. Então

$$\begin{aligned}
|<\sum_{j=i}^{k} \psi_j * \alpha_j, \xi>| &\leq \sum_{j=i}^{k} |<\psi_j * \alpha_j, \xi>| \\
&= \sum_{j=i}^{k} |<\alpha_j, \check{\psi}_j * \xi>| .
\end{aligned}$$

Mas, desde que $\alpha_j \in L^p_w$, segue que (ver 1.8)

$$
\begin{aligned}
|<\alpha_j,\check{\psi}*\xi>| &= |\int_{\mathbb{R}^n}\alpha_j(x)(\check{\psi}_j*\xi)(x)dx| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n}|\alpha_j(x)w(x)^{\frac{1}{p}}|\,|(\check{\psi}_j*\xi)(x)w(x)^{-\frac{1}{p}}|dx \\
&\leq ||\alpha_j||_{L^p_w}||\check{\psi}_j*\xi||_{L^{p'}_v}
\end{aligned}
$$

onde $v=w^{-1/p-1}$ e $1/p+1/p'=1$. Além disso

$$
\begin{aligned}
(\check{\psi}_j*\xi)(x) &= \int_{\mathbb{R}^n}\check{\psi}_j(x-y)\xi(y)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\psi_j(y-x)\xi(y)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\psi_j(-x-y)\xi(-y)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\psi_j(-x-y)\check{\xi}(y)dy \\
&= (\psi_j*\check{\xi})(-x)
\end{aligned}
$$

e então

$$
\begin{aligned}
||\check{\psi}_j*\xi||_{L^{p'}_v} &= \int_{\mathbb{R}^n}|(\check{\psi}_j*\xi)(x)|^{p'}v(x)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}|(\psi_j*\check{\xi})(-x)|^{p'}v(x)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}|(\psi_j*\check{\xi})(x)|^{p'}v(-x)dx \\
&= ||\psi_j*\check{\xi}||_{L^{p'}_u},
\end{aligned}
$$

onde $u=\check{v}$. Tomando $\varepsilon>0$ temos

$$
\begin{aligned}
|<\sum_{j=i}^{k}\psi_j*\alpha_j,\xi>| &\leq \sum_{j=i}^{k}||\alpha_j||_{L^p_w}||\psi_j*\check{\xi}||_{L^{p'}_u} \\
&= \sum_{j=i}^{k}2^{j(s-\varepsilon)}||\alpha_j||_{L^p_w}2^{j(-s+\varepsilon)}||\psi_j*\check{\xi}||_{L^{p'}_u} \\
&\leq 3(\sum_{j=i}^{k}2^{j(s-\varepsilon)}||\alpha_j||_{L^p_w})\sup_j 2^{j(-s+\varepsilon)}||\phi_j*\check{\xi}||_{L^{p'}_u}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&\leq 3\|\check{\xi}\|_{B^{-s+\varepsilon,u}_{p',\infty}}\Big(\sum_{j=i}^{k}(2^{js}\|\alpha_j\|_{L^p_w})^q\Big)^{1/q}\Big(\sum_{j=i}^{k}2^{-j\varepsilon q'}\Big)^{1/q'}\\
&\leq 3\|\check{\xi}\|_{B^{-s+\varepsilon,u}_{p',\infty}}\|(\alpha_j)_{j\geq 0}\|_{\ell^s_q(L^p_w)}\Big(\sum_{j=i}^{k}2^{-j\varepsilon q'}\Big)^{1/q'} .
\end{aligned}$$

Mas, sabemos que se $w \in A_p$, $1 < p < \infty$ e $1 \leq q \leq \infty$ então $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow B^{s,w}_{p,q}$ (ver [24]). Além disso, temos também que $u \in A_{p'}$ se $w \in A_p$. De fato, usando a relação $1/p + 1/p' = 1$ temos

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \check{v}(x)dx\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \check{v}(x)^{-\frac{1}{p'-1}}dx\right)^{p'-1} =\\
&= \left(\frac{1}{|-Q|}\int_{-Q} v(x)dx\right)\left(\frac{1}{|-Q|}\int_{-Q} v(x)^{-\frac{1}{p'-1}}dx\right)^{p'-1}\\
&= \left(\frac{1}{|-Q|}\int_{-Q} w(x)dx\right)^{p'-1}\left(\frac{1}{|-Q|}\int_{-Q} w(x)^{-\frac{1}{p-1}}dx\right)^{(p'-1)(p-1)}\\
&= \left(\left(\frac{1}{|-Q|}\int_{-Q} w(x)dx\right)\left(\frac{1}{|-Q|}\int_{-Q} w(x)^{-\frac{1}{p-1}}dx\right)^{p-1}\right)^{p'-1} \leq C^{p'-1}
\end{aligned}$$

Desta forma concluímos que $\check{\xi} \in B^{-s+\varepsilon,\check{v}}_{p',\infty}$ e

$$|<\sum_{j=i}^{k}\psi_j * \alpha_j, \xi>| \leq C\Big(\sum_{j=i}^{k}2^{-j\varepsilon q'}\Big)^{1/q'}$$

e assim segue a convergência desejada. Suponhamos agora $(\alpha_j)_{j\geq 0} \in L^p_w(\ell^s_q)$. Da mesma forma temos que

$$\begin{aligned}
|<\sum_{j=i}^{k}\psi_j * \alpha_j, \xi>| &= |\sum_{j=i}^{k}\int_{\mathbb{R}^n}\alpha_j(x)(\check{\psi}_j * \xi)(x)dx|\\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n}\sum_{j=i}^{k}|\alpha_j(x)|\,|(\check{\psi}_j * \xi)(x)|dx\\
&\leq \|\sum_{j=i}^{k}2^{j(s-\varepsilon)}|\alpha_j|\,\|_{L^p_w}\|\sup_j 2^{j(-s+\varepsilon)}|\check{\psi}_j * \xi|\,\|_{L^{p'}_v}\\
&= \|\sum_{j=i}^{k}2^{j(s-\varepsilon)}|\alpha_j|\,\|_{L^p_w}\|\sup_j 2^{j(-s+\varepsilon)}|\psi_j * \check{\xi}|\,\|_{L^{p'}_u}\\
&\leq 3\|\check{\xi}\|_{F^{-s+\varepsilon,u}_{p',\infty}}\|\Big(\sum_{j=i}^{k}(2^{js}|\alpha_j|)^q\Big)^{1/q}\Big(\sum_{j=i}^{k}2^{-j\varepsilon q'}\Big)^{1/q'}\|_{L^p_w}
\end{aligned}$$

$$\leq \quad 3\|\check{\xi}\|_{F^{-s+\varepsilon,u}_{p',\infty}}\|(\alpha_j)_{j\geq 0}\|_{L^p_w(\ell^s_q)}(\sum_{j=i}^{k} 2^{-j\varepsilon q'})^{1/q'} .$$

e notando que $\mathcal{S}(I\!R^n) \hookrightarrow F^{-s+\varepsilon,u}_{p',\infty}$ ([24]) segue a convergência. Para terminarmos a demonstração, suponhamos agora que Φ é qualquer e vamos escolher (Teorema V.1.2) p_0, p_1 tais que $1 < p_0, p_1 < \infty$, $w \in A_{p_0} \cap A_{p_1}$ e

$$< L^{p_0}_w(E), L^{p_1}_w(E) >_{\rho,p} = L^{\Phi}_w(E),$$

Usando o Teorema III.2.2, e [4] temos

$$\begin{aligned} \ell^s_q(L^{\Phi}_w) &= \ell^s_q(< L^{p_0}_w, L^{p_1}_w >_{\rho,p}) \\ &\hookrightarrow \ell^s_q(L^{p_0}_w + L^{p_1}_w) \\ &= \ell^s_q(L^{p_0}_w) + \ell^s_q(L^{p_1}_w) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} L^{\Phi}_w(\ell^s_q) &= < L^{p_0}_w(\ell^s_q), L^{p_1}_w(\ell^s_q) >_{\rho,p} \\ &\hookrightarrow L^{p_0}_w(\ell^s_q) + L^{p_1}_w(\ell^s_q). \end{aligned}$$

Logo se, $(\alpha_j)_{j\geq 0} \in \ell^s_q(L^{\Phi}_w)$ (ou $L^{\Phi}_w(\ell^s_q)$), então $(\alpha_j)_{j\geq 0} = (\beta_j)_{j\geq 0} + (\delta_j)_{j\geq 0}$ com $(\beta_j)_{j\geq 0} \in \ell^s_q(L^{p_0}_w)$ (ou $L^{p_0}_w(\ell^s_q)$) e $(\delta_j)_{j\geq 0} \in \ell^s_q(L^{p_1}_w)$ (ou $L^{p_1}_w(\ell^s_q)$). Consequentemente

$$\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j * \alpha_j = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j * \beta_j + \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j * \delta_j$$

e a demonstração fica completa.

4.3. TEOREMA: $B^{s,w}_{\Phi,q}$ (resp. $F^{s,w}_{\Phi,q}$, $1 < q < \infty$) é uma retração de $\ell^s_q(L^{\Phi}_w)$ (resp. $L^{\Phi}_w(\ell^s_q)$, $1 < q < \infty$).

Demonstração. Seja $(\phi_j)_{j\geq 0} \in \mathcal{O}(I\!R^n)$ e vamos definir para $f \in \mathcal{S}'(I\!R^n)$ e $(f_j)_{j\geq 0} \subset \mathcal{S}'(I\!R^n)$, as aplicações

(1) $$R(f) = (\phi_j * f)_{j\geq 0}$$

e

(2) $$S((f_j)_{j\geq 0}) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j * f_j$$

onde $\psi_j = \sum_{r=-1}^{1} \phi_{j+r}$. Se $(f_j)_{j\geq 0} \in \ell_q^s(L_w^\Phi)$ ou $(f_j)_{j\geq 0} \in L_w^\Phi(\ell_q^s)$, segue do Lema 4.2 que S é bem definida. Segue das hipóteses no suporte de $\widehat{\phi}_j$ que $S \circ R = I\!I_{\mathcal{S}'(I\!R^n)}$. Com efeito,

$$S(R(f)) = S((\phi_j * f)_{j\geq 0}) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j * \phi_j * f$$

Mas se $x \in \operatorname{supp} \phi_j$ temos que $\widehat{\psi}_j(x) = 1$ e então $\psi_j * \phi_j = \phi_j$, donde obtemos que $S(R(f)) = \sum_{j=0}^{\infty} \phi_j * f$. Mas, na demonstração da Proposição 3.5 vimos que $\sum_{j=0}^{\infty} \phi_j * f \overset{\mathcal{S}'(I\!R^n)}{=} f$, e então $S(R(f)) = f$ se $f \in \mathcal{S}'(I\!R^n)$. Agora, vamos demonstrar que S é uma aplicação linear contínua de $\ell_q^s(L_w^\Phi)$ (resp. $L_w^\Phi(\ell_q^s)$, $1 < q < \infty$) em $B_{\Phi,q}^{s,w}$ (resp. $F_{\Phi,q}^{s,w}$, $1 < q < \infty$), e R é uma aplicação linear contínua de $B_{\Phi,q}^{s,w}$ (resp. $F_{\Phi,q}^{s,w}$, $1 < q < \infty$) em $\ell_q^s(L_w^\Phi)$ (resp. $L_w^\Phi(\ell_q^s)$, $1 < q < \infty$). A conclusão para R segue imediatamente de (1). Vamos à demonstração para S. Das hipóteses no suporte de $\widehat{\phi}_j$, temos

$$||S((f_j)_{j\geq 0})||_{B_{\Phi,q}^{s,w}} \leq (\sum_{j=0}^{\infty}(2^{js}||\phi_j * S((f_j))||_{L_w^\Phi})^q)^{1/q}$$

Notando que

$$\phi_j * S((f_j)) = \phi_j * \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k * f_k = \sum_{r=-2}^{2} \phi_j * \psi_{j+r} * f_{j+r}, \tag{3}$$

($\psi_k = f_k = 0$ se $k < 0$), segue que

$$||S((f_j)_{j\geq 0})||_{B_{\Phi,q}^{s,w}} \leq (\sum_{j=0}^{\infty}(2^{js} \sum_{r=-2}^{2} ||\phi_j * \psi_{j+r} * f_{j+r}||_{L_w^\Phi})^q)^{1/q} \tag{4}$$

Considerando agora $m_{1\,1}(t) = (\widehat{\phi_j * \psi_{j+r}})(t)$, $m_{i\,j}(t) = 0$ se $i \neq 1 \neq j$ e $F = (g_k)_{k\geq 0}$ definido por $g_1 = f_{j+r}$, $g_k = 0$ se $k \neq 1$ temos que $(m_{i\,j})$ satisfaz as hipóteses (1) e (3) do Teorema 2.7. Então

$$\sum_{r=-2}^{2} ||\phi_j * \psi_{j+r} * f_{j+r}||_{L_w^\Phi} \leq C \sum_{r=-2}^{2} ||f_{j+r}||_{L_w^\Phi} \tag{5}$$

com C independente de j. Portanto, segue de (4) e (5) que

$$||S((f_j)_{j\geq 0})||_{B_{\Phi,q}^{s,w}} \leq 5C||(f_j)_{j\geq 0}||_{\ell_q^s(L_w^\Phi)}$$

Por outro lado, temos usando novamente (3) que

$$||S((f_j)_{j\geq 0})||_{F_{\Phi,q}^{s,w}} \leq \sum_{r=-2}^{2} ||(\phi_j * \psi_{j+r} * f_{j+r})_{j\geq 0}||_{L_w^\Phi(\ell_q^s)} \cdot$$

A seguir aplicaremos o Teorema 2.7 duas vezes consecutivas. Na primeira aplicação consideramos $(m_{i\,j})$ e (g_j) definidas por

$$m_{i\,j}(x) = \begin{cases} \widehat{\phi}_j(x) & \text{se } i = j = 0, 1, \cdots \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

e

$$g_j(x) = \begin{cases} (\psi_{j+r} * f_{j+r})(x) & \text{se } j = 0, 1, \cdots \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Assim, usando 3.1(1)-(2) observamos que

$$(\sum_{j=0}^{\infty} |D^\alpha \widehat{\phi}_j(x)|^2)^{1/2} \leq C|x|^{-|\alpha|}$$

o que mostra que vale 2.7(1). Então

$$||(\phi_j * \psi_{j+r} * f_{j+r})_{j\geq 0}||_{L^\Phi_w(\ell^s_q)} \leq C||(\psi_{j+r} * f_{j+r})_{j\geq 0}||_{L^\Phi_w(\ell^s_q)}$$

Aplicando novamente o Teorema 2.7 com

$$m_{i\,j}(x) = \begin{cases} \psi_{j+r}(x) & \text{se } i = j = 0, 1, \cdots \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

e

$$g_j(x) = \begin{cases} f_{j+r})(x) & \text{se } j = 0, 1, \cdots \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

segue que

$$||(\psi_{j+r} * f_{j+r})_{j\geq 0}||_{L^\Phi_w(\ell^s_q)} \leq C||(f_{j+r})_{j\geq 0}||_{L^\Phi_w(\ell^s_q)}$$

Logo,

$$||S((f_j)_{j\geq 0})||_{F^{s,w}_{\Phi,q}} \leq C \sum_{r=-2}^{2} ||(f_{j+r})_{j\geq 0}||_{L^\Phi_w(\ell^s_q)} \leq 5C||(f_j)_{j\geq 0}||_{L^\Phi_w(\ell^s_q)}$$

o que conclui a demonstração do Teorema.

4.4. COROLÁRIO: Os espaços $B^{s,w}_{\Phi,q}$ $(1 \leq q \leq \infty)$ e $F^{s,w}_{\Phi,q}$ $(1 < q < \infty)$ são espaços de Banach.

Demonstração. Segue imediatamente do fato que retração de espaços de Banach são espaços de Banach.

Podemos agora demonstrar o Teorema de caracterização.

4.5. TEOREMA: Existem $1 < p_0, p_1 < \infty$ e $\rho \in \mathcal{P}^{+-}$ tais que

$$(1) \qquad < B^{s,w}_{p_0,q}, B^{s,w}_{p_1,q} >_{\rho,p} = B^{s,w}_{\Phi,q} \,, \qquad 1 \leq q \leq \infty$$

e

$$(2) \qquad < F^{s,w}_{p_0,q}, F^{s,w}_{p_1,q} >_{\rho,p} = F^{s,w}_{\Phi,q} \,, \qquad 1 < q < \infty \,.$$

Demonstração. Podemos escolher p_0, p_1 e $\rho \in \mathcal{P}^{+-}$ tais que $w \in A_{p_0} \cap A_{p_1}$ e o Teorema V.1.2 vale, i.e.,

$$(3) \qquad < L^{p_0}_w(E), L^{p_1}_w(E) >_{\rho,p} = L^{\Phi}_w(E) \,.$$

Desde que $\ell^s_q(E) = L^q_{(u)}(\mathbb{N}, d\mu; E)$ onde μ é a medida contagem $\sum_{i=0}^{\infty} \delta_i$ com $\delta_i(j) = 1$ se $i = j$ e $\delta_i(j) = 0$ se $i \neq j$ e $u(x) = 2^{sx}$, nós temos, usando o Teorema IV.2.1 e (3) com $E = \mathbb{R}$, que

$$(4) \qquad < \ell^s_q(L^{p_0}_w), \ell^s_q(L^{p_1}_w) >_{\rho,p} = \ell^s_q(L^{\Phi}_w) \,.$$

Agora, usando o Teorema 4.3 com $\Phi_i(t) = t^{p_i}$, $i = 0, 1$, temos

$$(5) \qquad R \,:\, B^{s,w}_{p_i,q} \longrightarrow \ell^s_q(L^{p_i}_w)$$

e ainda pelo Teorema 4.3

$$(6) \qquad S \,:\, \ell^s_q(L^{\Phi}_w) \longrightarrow B^{s,w}_{\Phi,q} \,.$$

Segue de (5), (6), do Teorema III.2.3 e (4) que

$$R \,: < B^{s,w}_{p_0,q}, B^{s,w}_{p_1,q} >_{\rho,p} \longrightarrow \ell^s_q(L^{\Phi}_w)$$

e como $R \circ S = \mathbb{I}$, temos

$$< B^{s,w}_{p_0,q}, B^{s,w}_{p_1,q} >_{\rho,p} \hookrightarrow B^{s,w}_{\Phi,q} \,.$$

Usando novamente o Teorema 4.3 vemos que

$$R \,:\, B^{s,w}_{\Phi,q} \longrightarrow \ell^s_q(L^{\Phi}_w)$$

e procedendo como anteriormente

$$S \; : \; \ell_q^s(L_w^\Phi) \longrightarrow < B_{p_0,q}^{s,w}, B_{p_1,q}^{s,w} >_{\rho,p}$$

o que nos dá a inclusão

$$B_{\Phi,q}^{s,w} \hookrightarrow < B_{p_0,q}^{s,w}, B_{p_1,q}^{s,w} >_{\rho,p} \tag{7}$$

donde concluímos (1). De forma semelhante temos

$$R \; : \; F_{p_i,q}^{s,w} \longrightarrow L_w^{p_i}(\ell_q^s)$$

e

$$S \; : \; L_w^\Phi(\ell_q^s) \longrightarrow F_{\Phi,q}^{s,w} \; .$$

Logo, usando (3) e o Teorema III.2.3

$$R \; :< F_{p_0,q}^{s,w}, F_{p_1,q}^{s,w} >_{\rho,p} \longrightarrow L_w^\Phi(\ell_q^s)$$

o que demonstra que

$$< F_{p_0,q}^{s,w}, F_{p_1,q}^{s,w} >_{\rho,p} \hookrightarrow F_{\Phi,q}^{s,w} \tag{8}$$

Por outro lado temos

$$R \; : \; F_{\Phi,q}^{s,w} \longrightarrow L_w^\Phi(\ell_q^s)$$

e novamente por (3)

$$S \; : \; L_w^\Phi(\ell_q^s) \longrightarrow < F_{p_0,q}^{s,w}, F_{p_1,q}^{s,w} >_{\rho,p}$$

o que dá a inclusão contrária de (8) e consequentemente concluímos (2).

A seguir apresentaremos algumas consequências do Teorema 4.5.

4.6. COROLÁRIO: (i) $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow B_{\Phi,q}^{s,w} \hookrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ $(1 \leq q \leq \infty)$.
(ii) $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow F_{\Phi,q}^{s,w} \hookrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ $(1 < q < \infty)$.

Demonstração. As afirmações do Corolário são verdadeiras para $\Phi(t) = t^p$, $1 < p < \infty$, (ver [24]). Sejam $1 < p_0, p_1 < \infty$ e $\rho \in \mathcal{P}^{+-}$ tais que $w \in A_{p_0} \cap A_{p_1}$ e o Teorema 4.5 vale, isto é,

$$< B_{p_0,q}^{s,w}, B_{p_1,q}^{s,w} >_{\rho,p} = B_{\Phi,q}^{s,w} \quad , \quad < F_{p_0,q}^{s,w}, F_{p_1,q}^{s,w} >_{\rho,p} = F_{\Phi,q}^{s,w} \tag{1}$$

Logo a conclusão do Corolário segue de (1) e do Teorema III.2.2, pois

$$\mathcal{S}(I\!R^n) \hookrightarrow B^{s,w}_{p_0,q} \cap B^{s,w}_{p_1,q} \hookrightarrow < B^{s,w}_{p_0,q}, B^{s,w}_{p_1,q} >_{\rho,p} = B^{s,w}_{\Phi,q} \hookrightarrow B^{s,w}_{p_0,q} + B^{s,w}_{p_1,q} \hookrightarrow \mathcal{S}'(I\!R^n),$$

valendo o mesmo para $F^{s,w}_{\Phi,q}$.

4.7. COROLÁRIO: Existem $r \leq \min(q_\Phi, q)$ e $t \geq \max(p_\Phi, q)$ tais que

$$B^{s,w}_{\Phi,r} \hookrightarrow F^{s,w}_{\Phi,q} \hookrightarrow B^{s,w}_{\Phi,t}\,. \tag{1}$$

Demonstração. Sejam p_0, p_1 e $\rho \in \mathcal{P}^{+-}$ tais que $1 < p_1 < q_\Phi \leq p_\Phi < p_0 < \infty$ e o Teorema 4.5 vale, isto é,

$$< B^{s,w}_{p_0,q}, B^{s,w}_{p_1,q} >_{\rho,p} = B^{s,w}_{\Phi,q} \quad , \quad < F^{s,w}_{p_0,q}, F^{s,w}_{p_1,q} >_{\rho,p} = F^{s,w}_{\Phi,q}$$

Sejam $r = \min(p_1, q)$ e $t = \max(p_0, q)$. Assim segue de 3.8(2) que

$$B^{s,w}_{\Phi,r} = < B^{s,w}_{p_0,r}, B^{s,w}_{p_1,r} >_{\rho,p} \hookrightarrow < B^{s,w}_{p_0,\min(p_0,q)}, B^{s,w}_{p_1,r} >_{\rho,p}$$

pois $r \leq \min(p_0, q)$. Mas pelo Teorema 2.6 de [24] temos

$$< B^{s,w}_{p_0,\min(p_0,q)}, B^{s,w}_{p_1,r} >_{\rho,p} \hookrightarrow < F^{s,w}_{p_0,q}, F^{s,w}_{p_1,q} >_{\rho,p} = F^{s,w}_{\Phi,q}$$

e

$$F^{s,w}_{\Phi,q} = < F^{s,w}_{p_0,q}, F^{s,w}_{p_1,q} >_{\rho,p} \hookrightarrow < B^{s,w}_{p_0,t}, B^{s,w}_{p_1,\max(p_1,q)} >_{\rho,p}$$

e usando novamente 3.8(2) temos

$$< B^{s,w}_{p_0,t}, B^{s,w}_{p_1,\max(p_1,q)} >_{\rho,p} \hookrightarrow < B^{s,w}_{p_0,t}, B^{s,w}_{p_1,t} >_{\rho,p} = B^{s,w}_{\Phi,t}\ ,$$

o que demonstra (1).

4.8. COROLÁRIO: $F^{0,w}_{\Phi,2} = L^{\Phi}_{w}$.

Demonstração. Segue de [24, Teorema 1.4] e Teoremas V.1.2 e 4.5. Com efeito,

$$F^{0,w}_{\Phi,2} = < F^{0,w}_{p_0,2}, F^{0,w}_{p_1,2} >_{\rho,p} = < L^{p_0}_{w}, L^{p_1}_{w} >_{\rho,p} = L^{\Phi}_{w}.$$

4.9. TEOREMA: Se $1 < q < \infty$ então os espaços $B^{s,w}_{\Phi,q}$ e $F^{s,w}_{\Phi,q}$ têm a propriedade U.M.D.

Demonstração. Os espaços ℓ^s_q, $1 < q < \infty$, têm a propriedade U.M.D. uma vez que ℓ_q, $1 < q < \infty$ tem tal propriedade. De fato,

$$
\begin{aligned}
\|\mathcal{H}(f_j)\|_{L^p(\ell_q^s)} &= \|(2^{js}\mathcal{H}f_j)\|_{L^p(\ell_q)} = \|\mathcal{H}(2^{js}f_j)\|_{L^p(\ell_q)} \\
&\leq C\|(2^{js}f_j)\|_{L^p(\ell_q)} = \|(f_j)\|_{L^p(\ell_q^s)}
\end{aligned}
$$

ou seja, $\mathcal{H} : L^p(\ell_q^s) \to L^p(\ell_q^s)$. Por outro lado, o espaço de Calderón $X(E)$ tem a propriedade U.M.D. se e somente se X e E têm a propriedade U.M.D. (ver [25]). Além disso Cobos-Fernandez demonstraram em [5] que retração de espaços com a propriedade U.M.D. herda essa propriedade. Logo, usando o Teorema 4.3 concluímos a demonstração.

CAPÍTULO VIII

OS ESPAÇOS $B^{\sigma,w}_{\Phi,q}$ E $F^{\sigma,w}_{\Phi,q}$

Neste último capítulo vamos extender as definições dos espaços $B^{s,w}_{\Phi,q}$ e $F^{s,w}_{\Phi,q}$ onde trocamos o parâmetro real s por um parâmetro funcional σ pertencente a uma classe conveniente. Apresentaremos uma caracterização dos espaços $B^{\sigma,w}_{\Phi,q}$ e $F^{\sigma,w}_{\Phi,q}$ via interpolação dos espaços $B^{s,w}_{\Phi,q}$ e $F^{s,w}_{\Phi,q}$, respectivamente. Finalizando, demonstraremos outros teoremas de interpolação onde destacaremos o caso geral de ρ e o caso $\rho(t) = t^{\theta}$.

1. DEFINIÇÕES E PROPRIEDADES

A seguir generalizaremos os espaços $B^{s,w}_{\Phi,q}$ e $F^{s,w}_{\Phi,q}$ trocando o número real s por um parâmetro funcional.

1.1. Seja $\mathcal{B}$ a classe dos parâmetros funcionais contínuos $\sigma \ : \ (0,\infty) \longrightarrow (0,\infty)$ com $\sigma(1) = 1$ e tais que

$$\overline{\sigma}(t) = \sup_{s>0} \frac{\sigma(st)}{\sigma(s)} < \infty \ . \tag{1}$$

Os indices de Boyd $\alpha_{\overline{\sigma}}$ e $\beta_{\overline{\sigma}}$ do parâmetro funcional σ são definidos por

$$\alpha_{\overline{\sigma}} = \inf_{t>1} \frac{\log \overline{\sigma}(t)}{\log t} = \lim_{t\to\infty} \frac{\log \overline{\sigma}(t)}{\log t}$$

e

$$\beta_{\overline{\sigma}} = \sup_{0<t<1} \frac{\log \overline{\sigma}(t)}{\log t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{\log \overline{\sigma}(t)}{\log t}$$

Os indices $\alpha_{\overline{\sigma}}$ e $\beta_{\overline{\sigma}}$ satisfazem (ver [21])

$$-\infty < \beta_{\overline{\sigma}} \leq \alpha_{\overline{\sigma}} < \infty \ , \tag{2}$$

$$\alpha_{\overline{\sigma}} < 0 \quad \text{se e somente se} \quad \int_1^{\infty} \overline{\sigma}(t) \frac{dt}{t} < \infty \tag{3}$$

e

(4) $$\beta_{\overline{\sigma}} > 0 \quad \text{se e somente se} \quad \int_0^1 \overline{\sigma}(t)\frac{dt}{t} < \infty\,.$$

1.2. Para $\sigma \in \mathcal{B}$, $1 \leq q \leq \infty$ e E um espaço de Banach consideremos o espaço de Banach

$$\ell_q^\sigma(E) = \{(a_j)_{j\geq 0} \subset E \;:\; ||(a_j)_{j\geq 0}||_{\ell_q^\sigma(E)} = ||(\sigma(2^j)||a_j||_E)_{j\geq 0}||_{\ell_q} < \infty\}\,,$$

com a interpretação usual quando $q = \infty$. Escreveremos ℓ_q^σ no lugar de $\ell_q^\sigma(I\!R)$.

1.3. Para $\sigma \in \mathcal{B}$ os espaços $B_{\Phi,q}^{\sigma,w}$ e $F_{\Phi,q}^{\sigma,w}$ são definidos do mesmo modo que os espaços $B_{\Phi,q}^{s,w}$ e $F_{\Phi,q}^{s,w}$ trocando o número real s pelo parâmetro funcional σ.

No que segue vamos considerar sempre $\sigma \in \mathcal{B}$. Necessitaremos do seguinte resultado auxiliar.

1.4. LEMA: Para $\sigma \in \mathcal{B}$ existem $s_0, s_1 \in I\!R$ e $\rho \in \mathcal{P}^{+-}$ tais que

(1) $$\sigma(t) = \frac{t^{s_0}}{\rho(t^{s_0-s_1})}\,.$$

Demonstração. Sejam s_0, s_1 tais que

$$-\infty < s_1 < \min(0, \beta_{\overline{\sigma}}) \leq \max(1, \alpha_{\overline{\sigma}}) < s_0 < \infty$$

e vamos definir ρ por

$$\rho(t) = \frac{t^{\frac{s_0}{s_0-s_1}}}{\sigma(t^{\frac{1}{s_0-s_1}})}\,.$$

Desta forma temos que (ver [21])

(2) $$\overline{\rho}(t) = t^{\frac{s_0}{s_0-s_1}}\overline{\sigma}(t^{\frac{1}{s_1-s_0}})$$

e

$$\frac{s_0}{s_0-s_1} - \frac{\alpha_{\overline{\sigma}}}{s_0-s_1} = \beta_{\overline{\rho}} \leq \alpha_{\overline{\rho}} = \frac{s_0}{s_0-s_1} - \frac{\beta_{\overline{\sigma}}}{s_0-s_1}\,.$$

Assim, da escolha de s_0 e s_1 temos que $0 < \beta_{\overline{\rho}} \leq \alpha_{\overline{\rho}} < 1$. Vejamos que esta última expressão é equivalente a $\rho \in \mathcal{P}^{+-}$. Como $\beta_{\overline{\rho}} > 0$, podemos supor sem perda de generalidade que ρ é crescente e tomando $\xi(t) = t^{-1}\rho(t)$ segue que $\alpha_{\overline{\xi}} = -1 + \alpha_{\overline{\rho}} < 0$ e então também podemos supor que $\xi(t)$ é decrescente (ver [22]). Logo, ρ é quase- concava. Vamos mostrar agora que

(3) $$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \min(1, 2^{-js})\overline{\rho}(2^{js}) < \infty \quad (s > 0).$$

De fato, usando 1.1(4) temos

$$\begin{aligned}
\sum_{j<0} \overline{\rho}(2^{js}) &= \sum_{j<0} \frac{1}{s\log 2} \int_{2^{js}}^{2^{(j+1)s}} \overline{\rho}(2^{js}) \frac{dt}{t} \\
&\le \sum_{j<0} \frac{1}{s\log 2} \int_{2^{js}}^{2^{(j+1)s}} \overline{\rho}(t) \frac{dt}{t} \\
&= \frac{1}{s\log 2} \int_0^1 \overline{\rho}(t) \frac{dt}{t} < \infty
\end{aligned}$$

e por 1.1(3) temos

$$\begin{aligned}
\sum_{j>0} \overline{\xi}(2^{js}) &\le \sum_{j>0} \frac{1}{s\log 2} \int_{2^{(j-1)s}}^{2^{js}} \overline{\xi}(t) \frac{dt}{t} \\
&= \frac{1}{s\log 2} \int_1^{\infty} \overline{\xi}(t) \frac{dt}{t} < \infty
\end{aligned}$$

o que prova (3). Porém (3) implica em $\overline{\rho}(t) = o(\max(1,t))$, pois dado $\varepsilon > 0$ existe $t_0 = 2^{j_0 s}$ (com j_0 suficientemente pequeno) tal que, para $t \le t_0$, temos

$$\overline{\rho}(t) \le \overline{\rho}(2^{j_0 s}) \le \sum_{j \le j_0} \overline{\rho}(2^{js}) < \varepsilon.$$

Por outro lado, existe $t_0 = 2^{j_0 s}$ tal que se $t \ge t_0$ então

$$\overline{\xi}(t) \le \overline{\xi}(2^{j_0 s}) \le \sum_{j \ge j_0} \overline{\xi}(2^{js}) < \varepsilon.$$

Assim $\rho \in \mathcal{P}^{+-}$ e o Lema fica provado.

1.5. TEOREMA: O teorema de multiplicadores, Teorema VII.2.7 continua verdadeiro para $L_w^{\Phi}(\ell_q^{\sigma})$.

Demonstração. Sejam s_0, s_1 e $\rho \in \mathcal{P}^{+-}$ como no Lema 1.4 Desde que $\ell_q^{\sigma} = L_{(u)}^q(\mathbb{N}, d\mu)$ com $u(x) = \sigma(2^x)$ e μ a medida contagem, temos pelo Teorema IV.2.2 e 1.4.(1), que

(1) $$< \ell_q^{s_0}, \ell_q^{s_1} >_{\rho,p} = \ell_q^{\sigma} .$$

Agora, desde que o método $< \, , \, >_{\rho,p}$ é um método de interpolação, a prova do Teorema segue de (1) e dos Teoremas VII.2.7 e VI.1.2.

1.6. TEOREMA: O espaço $B^{\sigma,w}_{\Phi,q}$, $1 \leq q \leq \infty$ (resp. $F^{\sigma,w}_{\Phi,q}$, $1 < q < \infty$) é uma retração de $\ell^{\sigma}_q(L^{\Phi}_w)$, $1 \leq q \leq \infty$ (resp. $L^{\Phi}_w(\ell^{\sigma}_q)$, $1 < q < \infty$).

Demonstração. Análoga à demonstração do Teorema VII.4.3, usando o Teorema 1.5 no lugar do Teorema VII.2.7.

Como consequências temos

1.7. COROLÁRIO: Os espaços $B^{\sigma,w}_{\Phi,q}$ $(1 \leq q \leq \infty)$ e $F^{\sigma,w}_{\Phi,q}$ $(1 < q < \infty)$ são espaços de Banach.

1.8. COROLÁRIO: Se $1 < q < \infty$ então os espaços $B^{\sigma,w}_{\Phi,q}$ e $F^{\sigma,w}_{\Phi,q}$ têm a propriedade U.M.D.

2. TEOREMAS DE INTERPOLAÇÃO E CONSEQUÊNCIAS. CASO GERAL

Os espaços $B^{\sigma,w}_{\Phi,q}$ e $F^{\sigma,w}_{\Phi,q}$ podem ser caracterizados como espaços de interpolação entre os espaços $B^{s,w}_{\Phi,q}$ e $F^{s,w}_{\Phi,q}$, respectivamente.

2.1. TEOREMA: Existem $s_0, s_1 \in I\!R$ e $\rho \in \mathcal{P}^{+-}$ tais que

$$(1) \qquad < B^{s_0,w}_{\Phi,q}, B^{s_1,w}_{\Phi,q} >_{\rho,p} = B^{\sigma,w}_{\Phi,q} \quad (1 \leq q \leq \infty)$$

e

$$(2) \qquad < F^{s_0,w}_{\Phi,q}, F^{s_1,w}_{\Phi,q} >_{\rho,p} = F^{\sigma,w}_{\Phi,q} \quad (1 < q < \infty)\,.$$

Demonstração. Sejam s_0, s_1 e $\rho \in \mathcal{P}^{+-}$ dadas no Lema 1.4. Como no Teorema 1.5 temos

$$(3) \qquad < \ell^{s_0}_q(E), \ell^{s_1}_q(E) >_{\rho,p} = \ell^{\sigma}_q(E)\,,$$

onde E é um reticulado de Banach com concavidade finita. Então usando (3) e os Teoremas de retração temos

$$< B^{s_0,w}_{\Phi,q}, B^{s_1,w}_{\Phi,q} >_{\rho,p} \xrightarrow{R} < \ell^{s_0}_q(L^{\Phi}_w), \ell^{s_1}_q(L^{\Phi}_w) >_{\rho,p} = \ell^{\sigma}_q(L^{\Phi}_w) \xrightarrow{S} B^{\sigma,w}_{\Phi,q}$$

e

$$B^{\sigma,w}_{\Phi,q} \xrightarrow{R} \ell^{\sigma}_q(L^{\Phi}_w) = < \ell^{s_0}_q(L^{\Phi}_w), \ell^{s_1}_q(L^{\Phi}_w) >_{\rho,p} \xrightarrow{S} < B^{s_0,w}_{\Phi,q}, B^{s_1,w}_{\Phi,q} >_{\rho,p}$$

Lembrando que $S \circ R = I$, podemos concluir (1). Observemos agora que pelo Teorema VI.1.2 e (3) com $E = \mathbb{R}$ temos

$$(4) \qquad < L^{\Phi}_w(\ell^{s_0}_q), L^{\Phi}_w(\ell^{s_1}_q) >_{\rho,p} = L^{\Phi}_w(\ell^{\sigma}_q) \,.$$

Assim, usando (4) e os Teoremas de retração obtemos (2) através de

$$< F^{s_0,w}_{\Phi,q}, F^{s_1,w}_{\Phi,q} >_{\rho,p} \xrightarrow{R} L^{\Phi}_w(\ell^{\sigma}_q) \xrightarrow{S} F^{\sigma,w}_{\Phi,q}$$

e

$$F^{\sigma,w}_{\Phi,q} \xrightarrow{R} L^{\Phi}_w(\ell^{\sigma}_q) \xrightarrow{S} < F^{s_0,w}_{\Phi,q}, F^{s_1,w}_{\Phi,q} >_{\rho,p} .$$

A prova está completa.

2.2. COROLÁRIO: (i) $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow B^{\sigma,w}_{\Phi,q} \hookrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ $(1 \leq q \leq \infty)$
(ii) $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow F^{\sigma,w}_{\Phi,q} \hookrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ $(1 < q < \infty)$.

Demonstração. Segue do Corolário VII.4.6 e dos Teoremas III.2.2 e 2.1.

2.3. COROLÁRIO: Existem $r \leq \min(q_\Phi, q)$ e $t \geq \max(p_\Phi, q)$ tais que

$$(1) \qquad B^{\sigma,w}_{\Phi,r} \hookrightarrow F^{\sigma,w}_{\Phi,q} \hookrightarrow B^{\sigma,w}_{\Phi,t}$$

Demonstração. Segue do Corolário VII.4.7 e do Teorema 2.1.

Para alguns dos próximos resultados, necessitaremos do seguinte resultado auxiliar.

2.4. LEMA: Sejam Φ_0, Φ_1 funções de Orlicz e Φ dada por VI.1.1(1). Se $w \in A_r$, $r = \min(q_{\Phi_0}/2, q_{\Phi_1}/2)$ então $w \in A_\Phi$.

Demonstração. Lembrando que $M_\Phi(s) = \sup_{t>0}(\Phi^{-1}(t)/\Phi^{-1}(st))$ temos que

$$\begin{aligned}
\Phi^{-1}(t) &= R(\Phi_0^{-1}(t), \Phi_1^{-1}(t)) \leq R(M_{\Phi_0}(s)\Phi_0^{-1}(st), M_{\Phi_1}(s)\Phi_1^{-1}(st)) \\
&\leq \max_{k=0,1} M_{\Phi_k}(s) R(\Phi_0^{-1}(st), \Phi_1^{-1}(st)) = \max_{k=0,1} M_{\Phi_k}(s)\Phi^{-1}(st)
\end{aligned}$$

o que mostra que $M_\Phi(s) \leq \max_{k=0,1} M_{\Phi_k}(s)$. Então para todo $0 < s < 1$ temos

$$-\max_{k=0,1} \log M_{\Phi_k}(s) = \min_{k=0,1} -\log M_{\Phi_k}(s) \leq -\log M_\Phi(s)$$

e assim

$$
(1) \qquad \begin{aligned}
\alpha_\Phi &\leq \frac{-\log M_\Phi(s)}{\log s} \leq \frac{\min_{k=0,1} -\log M_{\Phi_k}(s)}{\log s} \\
&= \max_{k=0,1} \frac{-\log M_{\Phi_k}(s)}{\log s} \leq \frac{-\log M_{\Phi_0}(s)}{\log s} + \frac{-\log M_{\Phi_1}(s)}{\log s}
\end{aligned}
$$

Por outro lado, se $n \in I\!\!N$ é arbitrário, existem $0 < s_n, s'_n < 1$ tais que

$$
(2) \qquad \frac{-\log M_{\Phi_0}(s_n)}{\log s_n} < \alpha_{\Phi_0} + \frac{1}{n} \quad \text{e} \quad \frac{-\log M_{\Phi_1}(s'_n)}{\log s'_n} < \alpha_{\Phi_1} + \frac{1}{n}\,.
$$

Vamos supor inicialmente $s_n \leq s'_n$. Então $M_{\Phi_0}(s'_n) \leq M_{\Phi_0}(s_n)$ e usando (2)

$$
(3) \qquad \frac{-\log M_{\Phi_0}(s'_n)}{\log s'_n} \leq \frac{-\log M_{\Phi_0}(s_n)}{\log s'_n} \leq \frac{-\log M_{\Phi_0}(s_n)}{\log s_n} < \alpha_{\Phi_0} + \frac{1}{n}
$$

Supondo agora $s'_n \leq s_n$ teremos que $M_{\Phi_1}(s_n) \leq M_{\Phi_1}(s'_n)$ e usando novamente (2)

$$
(4) \qquad \frac{-\log M_{\Phi_1}(s_n)}{\log s_n} \leq \frac{-\log M_{\Phi_1}(s'_n)}{\log s_n} \leq \frac{-\log M_{\Phi_1}(s'_n)}{\log s'_n} < \alpha_{\Phi_1} + \frac{1}{n}
$$

Desta forma, temos usando (1), (3) e (4) que $\alpha_\Phi < \alpha_{\Phi_0} + \alpha_{\Phi_1} + 2/n$ e desde que n é arbitrário temos $\alpha_\Phi \leq \alpha_{\Phi_0} + \alpha_{\Phi_1}$. Isto implica que $\alpha_\Phi \leq 2\max_{k=0,1} \alpha_{\Phi_k} = \max_{k=0,1} 2\alpha_{\Phi_k}$ e consequentemente

$$
\begin{aligned}
q_\Phi &= \frac{1}{\alpha_\Phi} \geq \frac{1}{2\max_{k=0,1} \alpha_{\Phi_k}} \\
&= \min_{k=0,1} \frac{1}{2\alpha_{\Phi_k}} = \min_{k=0,1} \frac{q_{\Phi_k}}{2}
\end{aligned}
$$

A conclusão segue de VII.2.4(c) e da Proposição VII.2.6.

2.5. TEOREMA: Sejam Φ_0, Φ_1, Φ e w como no Lema 2.4, então

$$
(1) \qquad < B^{\sigma,w}_{\Phi_0,q}, B^{\sigma,w}_{\Phi_1,q} >_{\rho,p} = B^{\sigma,w}_{\Phi,q} \qquad (1 \leq q \leq \infty)
$$

e

$$
(2) \qquad < F^{\sigma,w}_{\Phi_0,q}, F^{\sigma,w}_{\Phi_1,q} >_{\rho,p} = F^{\sigma,w}_{\Phi,q} \qquad (1 < q < \infty)\,.
$$

Demonstração. Segue dos Teoremas III.2.1 e VI.1.4 que

$$
(3) \qquad < \ell^\sigma_q(L^{\Phi_0}_w), \ell^\sigma_q(L^{\Phi_1}_w) >_{\rho,p} = \ell^\sigma_q(L^\Phi_w)
$$

e

(4) $$< L_w^{\Phi_0}(\ell_q^\sigma), L_w^{\Phi_1}(\ell_q^\sigma) >_{\rho,p} = L_w^{\Phi}(\ell_q^\sigma)\,.$$

Então, (1) segue de (3) e Teoremas 1.6, III.2.3, IV.2.1, VI.1.4 e (2) segue de (4) e Teoremas 1.6, III.2.3, VI.1.4.

2.6. TEOREMA: Sejam $\sigma_0, \sigma_1 \in \mathcal{B}$ e $\gamma = \sigma_0/\sigma_1$. Se $\alpha_{\overline{\gamma}} < 0$ ou $\beta_{\overline{\gamma}} > 0$ então

(1) $$< B_{\Phi,q}^{\sigma_0,w}, B_{\Phi,q}^{\sigma_1,w} >_{\rho,p} = B_{\Phi,q}^{\sigma,w} \qquad (1 \leq q \leq \infty)$$

e

(2) $$< F_{\Phi,q}^{\sigma_0,w}, F_{\Phi,q}^{\sigma_1,w} >_{\rho,p} = F_{\Phi,q}^{\sigma,w} \qquad (1 < q < \infty)$$

com $\sigma = \sigma_0/\rho(\gamma)$.

Demonstração. Segue de [4] que $\sigma \in \mathcal{B}$. A seguir, tomando $u_k(x) = \sigma_k(2^x)$, $k = 0,1$ teremos que $u(x) = \sigma(2^x) = u_0(x)/\rho(u_0(x)/u_1(x))$ e então pelo Teorema IV.2.2 temos

(3) $$< \ell_q^{\sigma_0}(E), \ell_q^{\sigma_1}(E) >_{\rho,p} = < L_{(u_0)}^q(E), L_{(u_1)}^q(E) >_{\rho,p} = L_{(u)}^q(E) = \ell_q^\sigma(E)$$

onde E é um reticulado de Banach com concavidade finita. Assim, (1) segue de (3) e dos Teoremas 1.6 e III.2.3. Com efeito,

$$< B_{\Phi,q}^{\sigma_0,w}, B_{\Phi,q}^{\sigma_1,w} >_{\rho,p} \xrightarrow{R} \ell_q^\sigma(L_w^\Phi) \xrightarrow{S} B_{\Phi,q}^{\sigma,w}$$

e

$$B_{\Phi,q}^{\sigma,w} \xrightarrow{R} \ell_q^\sigma(L_w^\Phi) \xrightarrow{S} < B_{\Phi,q}^{\sigma_0,w}, B_{\Phi,q}^{\sigma_1,w} >_{\rho,p}$$

Por outro lado (2) segue de (3) e dos Teoremas 1.6, III.2.3 e VI.1.4, pois

$$< F_{\Phi,q}^{\sigma_0,w}, F_{\Phi,q}^{\sigma_1,w} >_{\rho,p} \xrightarrow{R} L_w^\Phi(\ell_q^\sigma) \xrightarrow{S} F_{\Phi,q}^{\sigma,w}$$

e

$$F_{\Phi,q}^{\sigma,w} \xrightarrow{R} L_w^\Phi(\ell_q^\sigma) \xrightarrow{S} < F_{\Phi,q}^{\sigma_0,w}, F_{\Phi,q}^{\sigma_1,w} >_{\rho,p}$$

Fica então demonstrado o Teorema.

3. CASO $\rho(t) = t^\theta$

Para encerrar este trabalho, apresentaremos um resultado que engloba alguns dos Teoremas anteriores no caso que $\rho(t) = t^\theta$, $0 < \theta < 1$.

3.1. TEOREMA: Seja $\rho(t) = t^\theta$, $0 < \theta < 1$. Então,
(i) Se Φ_0, Φ_1 são funções de Orlicz , $w \in A_r$, onde r é como no Lema 2.4, Φ é dada por VI.1.1(1) e $1 \leq q_0, q_1 \leq \infty$, temos que

$$(1) \qquad < B^{\sigma,w}_{\Phi_0,q_0}, B^{\sigma,w}_{\Phi_1,q_1} >_{\rho,p} = B^{\sigma,w}_{\Phi,q} \ , \qquad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1} \, .$$

(ii) Se σ_0, σ_1 e σ são como no Teorema 2.6, e $1 \leq q_0, q_1 \leq \infty$, temos que

$$(2) \qquad < B^{\sigma_0,w}_{\Phi,q_0}, B^{\sigma_1,w}_{\Phi,q_1} >_{\rho,p} = B^{\sigma,w}_{\Phi,q} \ , \qquad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1} \, .$$

(iii) Se Φ_k , σ_k, $k = 0, 1$, Φ e σ são como em (i) e (ii), e $1 < q < \infty$, temos que

$$(3) \qquad < F^{\sigma_0,w}_{\Phi_0,q_0}, F^{\sigma_1,w}_{\Phi_1,q_1} >_{\rho,p} = F^{\sigma,w}_{\Phi,q} \ , \qquad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1} \, .$$

Demonstração. A prova de (1) segue dos Teoremas 1.6, III.2.3, IV.3.2 e VI.1.4. Para a prova de (2) é suficiente usarmos os Teoremas 1.6, III.2.3 e IV.3.3. Finalmente a prova de (3) é consequência dos Teoremas 1.6, III.2.3, IV.3.3 e VI.2.1.

Referências

[1] J.BERGH and J.LÖFSTRÖN, Interpolation spaces. An introdution. Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York, 1976.

[2] J.BOURGAIN, Some remarks on Banach space in which martingale difference sequences are unconditional. Ark. Mat. 21(1983), 163-168.

[3] D.L.BURKHOLDER, A geometrical condition that implies the existence of certain singular integrals of Banach-space-valued functions. Proc. Conference on Harmonic Analysis, University of Chicago, 1981.

[4] F.COBOS, On the Lorentz-Marcinkiewicz operator ideal. Math. Nachr. 126(1986), 281-300.

[5] F.COBOS - D.L.FERNANDEZ, Hardy-Sobolev spaces and Besov spaces with a function parameter. Lectures Notes in Math. 1302(1988), 158-170.

[6] D.L.FERNANDEZ, Interpolation of 2^d Banach spaces and the Calderón spaces $X(E)$. Proc. London Math. Soc. 56(1988), 143-162.

[7] D.L.FERNANDEZ, Multiplier Theorems on weighted $L^q(\ell^q)$- spaces. 23° Seminário Brasileiro de Análise, Campinas- Brasil, 1986.

[8] J.GARCIA CUERVA - J.L.RUBIO DE FRANCIA, Weighted norm inequalities and related topics. North-Holland, Amsterdam, 1985.

[9] D.G.GOMES, Acotaciones de operadores maximales sobre espacios de Orlicz. Tese de Doutorado, Universidade de Malaga, Espanha, 1985.

[10] N.E.GRETSKY - J.J.UHL,Jr., Bounded linear operators on Banach function spaces of vector-valued functions. Trans. Am. Math. Soc. 167(1972), 263-277.

[11] J.GUSTAVSSON, On interpolation of weighted L^p-spaces and Ovchinnikov's theorem. Studia Math. 52(1982), 237-251.

[12] J.GUSTAVSSON - J.PEETRE, Interpolation of Orlicz spaces. Studia Math. 60(1977), 33-59.

[13] L.HÖRMANDER, Linear Partial Differential Operators. Springer- Verlag, Berlin-Gottingen-Heidelberg, 1963.

[14] R.A.KERMAN - A.TORCHINSKY, Integral inequalities with weights for the Hardy maximal function. Studia Math. 71(1982), 277-284.

[15] V.K.KHOAN, Distributions, Analyse de Fourier, Opérateurs aux Dérivées Partielles. Tome I, II, Librairie Vuibert, Saint- Germain, Paris, 1972.

[16] M.A.KRASNOSELSKII - Ya.B.RUTITSKII, Convex functions and Orlicz spaces. Noordhoff, Groningen, 1961.

[17] S.G.KREIN - Ju.I.PETUNIN - E.M.SEMENOV, Interpolation of linear operators. Translations of Math. Monographas, vol.54, 1982.

[18] A.KUFNER - O.JOHN - S.FUCIK, Function spaces. Noordhoff International Publishing, Leyden, The Netherlands, 1977.

[19] J.LINDENSTRAUSS - L.TZAFRIRI, Classical Banach Spaces II. Function Spaces. Springer-Verlag, Berlin, 1979.

[20] L.MALIGRANDA, Orlicz spaces and interpolation, Seminários de Matemática n^o 5, Imecc-Unicamp, Campinas.

[21] C.MERUCCI, Interpolation réelle avec fonction paramètre. Dualité, reiteration et applications. Thèse d'Etat, Nantes, 1983.

[22] C.MERUCCI, Applications of interpolation with a function parameter to Lorentez, Sobolev and Besov spaces. Lectures Notes in Math. 1070(1984), 183-201.

[23] J.PEETRE, New thoughts on Besov spaces. Duke Univ. Math. Series 1, Durham, 1977.

[24] B.H.QUI, Weighted Besov and Triebel spaces: Interpolation by the real method. Hiroshima Math. J. 12(1982), 581-605.

[25] J.L.RUBIO DE FRANCIA, Probability and Banach spaces. Lectures Notes in Math. 1221(1986), 195-222.

[26] L.SCHWARTZ, Théorie des distributions. Paris, Hermann, 1973.

[27] M.S.SKAFF, Vector valued Orlicz spaces I, II. Pac. J. Math. 28(1969), 193-206, 535-540.

[28] J.L.TORREA, Integrales singulares vetoriales. Notas de Algebra y Analisis n^o 12, Bahia Blanca, 1984.

[29] H.TRIEBEL, Interpolation theory, function spaces, differential operators. North-Holland Math. Library, 18, 1978.

[30] J.J.UHL, Jr, Orlicz spaces of finitely additive set functions. Studia Math. 29(1967), 19-58.

[31] J.J.UHL, Jr, Compact operators on Orlicz spaces. Rend. Sem. Mat. Univ Padova, 42(1969), 209-219.

[32] K.YOSIDA, Functional Analysis. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg- New York, 1979.